Zeros de polinômios

Dados dois polinômios $p(z)$ e $q(z)$, existem polinômios $s(z)$ e $r(z)$, com grau $r(z) <$ grau $q(z)$, tais que

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z)$$

Em particular, quando $p(a) = 0$, tomando $q(z) = z - a$, temos $p(z) = s(z)(z-a) + r(z)$, com grau $r(z) < 1$, ou seja, $r(z)$ é constante. Mas $0 = p(a) = (z-a)s(\ ) + r(a) \Rightarrow r(z) = 0$. Logo

$$p(z) = (z-a)\,s(z)$$

Se ocorrer $s(a) = 0$, repetimos o argumento acima obtendo um polinômio $s_1(z)$ tal que $s(z) = (z-a)s_1(z)$, e assim

$$p(z) = (z-a)^2 s_1(z)$$

Se necessário, podemos repetir esse argumento mais um número finito de vezes obtendo $m \in \mathbb{N}$ ($1 \leq m \leq$ grau $p(z)$) e um polinômio $s_m(z)$ com $s_m(a) \neq 0$ tal que

$$p(z) = (z-a)^m s_m(z)$$

Neste caso, grau $s_m(z) =$ (grau $p(z)$) $- m$. Esse número $m \in \mathbb{N}$ é chamado de multiplicidade da raiz a.

Generalizando, se grau $p(z) = n$ e $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ são todos os zeros distintos de $p(z)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ então podemos escrever

$$p(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_k)^{m_k}\, s(z)$$

sendo $s(z)$ um polinômio que não possui zeros.

Pelo teorema fundamental da algebra, um polinômio sem zeros é constante, neste caso a fatoração de $p(z)$ como produto de polinômios de primeiro grau está completa.

Zeros de funções analíticas

Teorema: Seja $f: G \to \mathbb{C}$ analítica na região $G \subset \mathbb{C}$ uma função não identicamente nula. Se $a \in G$ é um zero de f, ou seja $f(a) = 0$, então existe um inteiro $m \geq 1$ e uma função analítica $g: G \to \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ e

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \ \forall z \in G$$

Neste caso dizemos que a é um zero de multiplicidade finita m.

Dem: Como $f \not\equiv 0$ então $f^{(k)}(a) \neq 0$, para algum $k > 0$.

Seja $n > 0$ o menor inteiro tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$ e $f^{(j)}(a) = 0$, para $j = 1, 2, \cdots, n-1$, e defina

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}, & \text{se } z \neq a \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, & \text{se } z = a \end{cases}$$

Neste caso g é analítica em $G - \{a\}$, e expandindo f em série de potências em torno de a constatamos que g é analítica também em $z = a$, pois

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k, \text{ com } a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = 0, \text{ se } k < n$$

e $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}$ é analítica com mesmo raio de convergência que f e satisfaz $g(a) = a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$. ∎

Singularidades

Dizemos que a função f tem uma singularidade isolada no ponto $a \in \mathbb{C}$ se existe $R > 0$ tal que f é analítica em $B(a,R) - \{a\}$, mas não é analítica na bola toda $B(a,R)$.

Exemplo: as funções $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, $g(z) = \frac{1}{z}$ e $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$ têm uma singularidade isolada na origem

Definição: Dizemos que a singularidade $a \in \mathbb{C}$ de f é removível se existe uma função analítica $g: B(a,R) \to \mathbb{C}$, com $R > 0$, tal que $g(z) = f(z)$, para $0 < |z-a| < R$

Ex: $f: \mathbb{C} - \{a\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z^2 - a^2}{z-a}$, $\forall z \neq a$, tem uma singularidade removível no ponto a.

Basta ver que $g(z) = z + a$, $\forall z \in \mathbb{C}$ é inteira e $f(z) = g(z)$, $\forall z \neq a$.

Teorema: Se f tem uma singularidade isolada no ponto a então essa singularidade é removível $\iff \lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$

Dem ($\Rightarrow$) Se a singularidade é removível então $\exists r>0$ e uma função analítica $g: B(a,r)\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)=f(z)$, $\forall z\in B(a,r)-\{a\}$.
Em particular $\lim_{z\to a} g(z)=g(a)$ existe e

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)g(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\lim_{z\to a}g(z)=0\,g(a)=0$$

($\Leftarrow$) Como a é uma singularidade isolada de f então $\exists r>0$ tal que f é analítica em $B(a,r)-\{a\}$. Defina então $g: B(a,r)\to\mathbb{C}$ por

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)f(z), & \text{se } z\neq a\\ 0, & \text{se } z=a\end{cases}$$

Como $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ (por hipótese) então g é contínua em $z=a$ e analítica em $B(a,r)-\{a\}$.

Afirmação: Basta provar que g é analítica em $B(a,r)$ para concluir que a singularidade no ponto a é removível

De fato, se g for analítica em $B(a,r)$, como $g(a)=0$ então podemos escrever $g(z)=(z-a)h(z)$, sendo $h: B(a,r)\to\mathbb{C}$ analítica. Assim

$(z-a)h(z)=(z-a)f(z)$, $\forall z\neq a$ em $B(a,r)$ $\Rightarrow$ $f(z)=h(z)$, $\forall z\in B(a,r)-\{a\}$

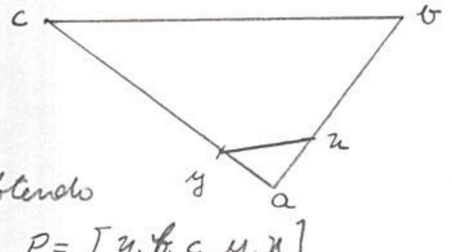
sendo h analítica em $B(a,r)$, ou seja, a é singularidade removível de f.

Prova da analiticidade de g em $B(a,r)$

Por definição, g é contínua e $z=a$ e analítica em $B(a,r)-\{a\}$. Falta apenas provar a analiticidade no ponto a. Faremos isso usando o teorema de Morera.

Seja T um triângulo em $B(a,r)$ e Δ o conjunto delimitado por T (incluindo o triângulo T).

i. Se $a\notin\Delta$ então $T\sim 0$ em $B(a,r)-\{a\}$, e portanto $\int_T g=0$ pelo teorema de Cauchy.



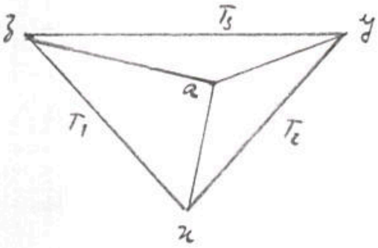
ii. Se a é um vértice do triângulo, então $T=[a,b,c,a]$. Nesse caso decompomos T em dois polígonos escolhendo $x\in[a,b]$ e $y\in[c,a]$, obtendo um triângulo $T_1=[a,x,y,a]$ e um quadrilátero $P=[x,b,c,y,x]$

Como $P \sim 0$ em $B(a,r)-\{a\}$ então $\int_P g = 0$ e

$$\int_T g = \int_{T_1} g + \int_P g = \int_{T_1} g$$

Agora, pela continuidade de g em a, dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que $|z-a|<\delta \Rightarrow |g(z)-\underbrace{g(a)}_{=0}| = |g(z)| < \varepsilon/\ell(T)$ ($\ell(T)$ é o comprimento de T)

então
$$\left|\int_T g\right| = \left|\int_{T_1} g\right| \leq \int_{T_1}|g| < \frac{\varepsilon}{\ell(T)}\int_{T_1}|dz| < \varepsilon \Rightarrow \int_T g = 0$$

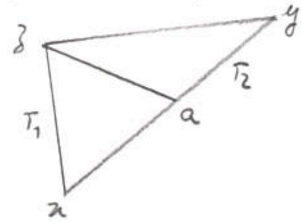


iii. Se $a \in \text{int}\,\Delta$ e $T=[x,y,z,x]$

Neste caso decompomos T em três triângulos $T_1=[a,z,x,a]$, $T_2=[a,x,y,a]$ e $T_3=[a,y,z,a]$

então $\int_T g = \int_{T_1} g + \int_{T_2} g + \int_{T_3} g$

e em cada um dos triângulos T_j, o ponto a ocupa a posição de vértice. Segue do caso anterior que $\int_{T_j} g = 0$, $j=1,2,3 \Rightarrow \int_T g = 0$



(iv) Se $a \in T$ e a não é vértice, basta decompor T em dois triângulos e seguir o mesmo raciocínio.

Isso mostra que, para qualquer triângulo T em $B(a,r)$ vale $\int_T g = 0$. Segue do teorema de Morera que g é analítica em $B(a,r)$. ■

Definição: Seja $z=a$ uma singularidade isolada da função f. Dizemos que a é um pólo de f se $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$, ou seja, $\forall M>0, \exists \delta>0;\ 0<|z-a|<\delta \Rightarrow |f(z)|>M$

Uma singularidade isolada que não é removível e nem é um pólo é chamada de singularidade essencial.