Topologia do plano complexo
(kit de sobrevivência para a disciplina)

Aula 2
01
05/01

Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ definimos a <u>bola aberta</u> $B(z_0, r)$ e a <u>bola fechada</u> $\bar{B}(z_0, r)$ de centro em z_0 e raio r por

$$B(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r \}$$
$$\bar{B}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| \leq r \}$$

Dizemos que um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ é <u>aberto</u> se qualquer ponto de G for centro de uma bola aberta contida em G, ou seja, $\forall z \in G, \exists \varepsilon > 0 , B(z, \varepsilon) \subset G$

<u>exemplo</u>: $G = \{ z \in \mathbb{C} ; a < \operatorname{Re} z < b \}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$,
$H^+ = \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z > 0 \}$ e $B(0,1)$ são todos abertos

Mas $H = H^+ \cup \{0\}$ não é aberto, pois qualquer bola centrada na origem contém pontos $w \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Im}(w) < 0$, logo $B(0, \varepsilon) \not\subset H$, $\forall \varepsilon > 0$.

<u>Proposição</u>: (i) $\mathbb{C}$ e $\emptyset$ são abertos

(ii) a reunião arbitrária de conjuntos abertos é um aberto, ou seja, se $\{ G_\lambda ; \lambda \in \Delta \}$ é uma família de conjuntos abertos então $G = \bigcup_{\lambda \in \Delta} G_\lambda$ é um aberto

(iii) a interseção finita de abertos é um aberto

<u>Dem</u>: (exercício)

Dizemos que um conjunto $F \subset \mathbb{C}$ é <u>fechado</u> se o seu complementar $F^c = \mathbb{C} - F$ for aberto

<u>exemplo</u>: $H = \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z \leq 0 \}$ é fechado, pois $H^c = H^+$ é aberto.

Proposição: (i) $\mathbb{C}$ e ϕ são fechados
(ii) a reunião finita de fechados é um fechado
(iii) Se $\{F_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ é uma família de conjuntos fechados então $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é fechado

dem: (exercício)

Seja $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto qualquer, definimos:

(i) o interior de A por $\operatorname{int} A \doteq \bigcup \{G ; G \subset A \text{ e } G \text{ é aberto}\}$
(ii) o fecho de A por $\bar{A} \doteq \bigcap \{F ; F \supset A \text{ e } F \text{ é fechado}\}$
(iii) a fronteira de A por $\partial A \doteq \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C} - A} = \bar{A} \cap \bar{A^c}$

Proposição: Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ subconjuntos quaisquer, então

a) A é aberto $\Longleftrightarrow A = \operatorname{int} A$
b) $z \in \operatorname{int} A \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 ; B(z, \varepsilon) \subset A$
c) A é fechado $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$
d) $z \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 ; B(z, \varepsilon) \cap A \neq \phi$
e) $\partial A = \bar{A} - \operatorname{int} A$
f) $z \in \partial A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(z, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ e $B(z, \varepsilon) \cap A^c \neq \phi$

dem: exercício

Seja $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto fixado. Dizemos que:

- $B \subset A$ é um aberto em A se $B = G \cap A$, sendo $G \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto de $\mathbb{C}$
- $D \subset A$ é um fechado em A se $D = F \cap A$, sendo $F \subset \mathbb{C}$ um conjunto fechado de $\mathbb{C}$

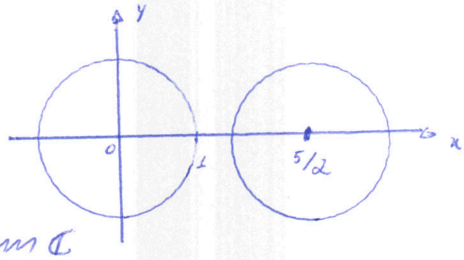
exemplo: Considere o conjunto $A = \{ z \in \mathbb{C} ; 0 \leq \operatorname{Re} z < 1 \}$.
Note que A não é aberto nem fechado em $\mathbb{C}$.

- O quadrado $Q = \{ z \in \mathbb{C} ;\ 0 < Re\, z \leq 1$ e $|Im\, z| < 1/2 \}$ é um conjunto aberto em A, pois $Q = G \cap A$, sendo $G = \{ z ;\ |Im\, z| < \frac{1}{2} \}$ um conjunto aberto em $\mathbb{C}$

- Como a bola fechada $\bar{B}(0,1)$ é um conjunto fechado então $R = A \cap \bar{B}(0,1)$ é um conjunto fechado em A.

(desenhe A, B, Q e G para visualizar melhor)

<u>exemplo importante</u>



$A = B(0,1) \cup B(5/2, 1)$

Note que A é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ pois é a reunião de duas bolas abertas. Mas também $B(0,1)$ é um aberto em A, pois

$B(0,1) = B(0,1) \cap A$ (interseção de um aberto de $\mathbb{C}$ com A)

A parte interessante aqui é que $B(0,1)$ também é fechado em A pois

$B(0,1) = \bar{B}(0,1) \cap A$ (interseção de um fechado de $\mathbb{C}$ com A)

Neste caso dizemos que A é um conjunto desconexo e cada uma das bolas abertas é uma componente conexa de A.

Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é <u>conexo</u> se os únicos subconjuntos de A que são simultaneamente abertos e fechados em A são o próprio A e o conjunto vazio ϕ.
Equivalentemente, A não possui subconjuntos próprios simultaneamente abertos e fechados.

Sequências em $\mathbb{C}$

Seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{C}$. Dizemos que <u>$\{z_n\}$ converge</u> para o ponto $z \in \mathbb{C}$, ou que

$z = \lim_{n\to\infty} z_n$ se a seqüência de números reais $|z_n - z| \longrightarrow 0$, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$ dado deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies |z_n - z| < \varepsilon$$

Geometricamente, qualquer bola aberta $B(z, \varepsilon)$ deve conter todos os pontos de $\{z_n\}$, exceto possivelmente um número finito.

Como $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$ então é fácil concluir que

$$z_n \longrightarrow z \iff \mathrm{Re}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Re}\, z \text{ e } \mathrm{Im}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Im}\, z$$

Exemplos: Se $|z| < 1$ então $z^n \longrightarrow 0$, pois $|z^n - 0| = |z|^n \longrightarrow 0$, e $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3i} = \frac{1}{2}$ pois $\left|\frac{n}{2n+3i} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-3i}{4n+6i}\right| = \frac{3}{\sqrt{16n^2+36}} \longrightarrow 0$

Uma seqüência $\{z_n\}$ é chamada seqüência de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$ dado existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \implies |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Proposição: $\{z_n\}$ converge $\iff$ $\{z_n\}$ é de Cauchy

Dem: Se $z_n \longrightarrow z$ então $\mathrm{Re}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Re}\, z$ e $\mathrm{Im}\, z_n \longrightarrow \mathrm{Im}\, z$. Como $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ e $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$ são seqüências de números reais então são seq. de Cauchy, ou seja, é possível escolher um $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $|\mathrm{Re}\, z_n - \mathrm{Re}\, z_m| < \varepsilon/2$ e $|\mathrm{Im}\, z_n - \mathrm{Im}\, z_m| < \varepsilon/2$, sempre que $m, n > n_0$. Desse modo

$$m, n > n_0 \implies |z_n - z_m| \leq |\mathrm{Re}(z_m - z_n)| + |\mathrm{Im}(z_m - \mathrm{Im}\, z_n)|$$
$$= |\mathrm{Re}\, z_m - \mathrm{Re}\, z_n| + |\mathrm{Im}\, z_m - \mathrm{Im}\, z_n| < \varepsilon$$

Reciprocamente, se $\{z_n\}$ é de Cauchy então as desigualdades $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ e $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ permitem concluir que as seqüências de números reais $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ e $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$ são de Cauchy, e portanto convergentes. Daqui segue que $\{z_n\}$ converge ∎

Dizemos que a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge se a sequência de somas parciais $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ converge, nesse caso de $\{s_n\}$ é chamado de soma da série

Proposição:

(i) se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge então $\lim_{k \to \infty} z_k = 0$

(ii) se $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge então $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge

Quando a série $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge, dizemos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente

Obs: O item (ii) será importante no futuro pois se $\sum_{=1}^{\infty} |z|$ converge e $t_n = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ é a sequência de somas parciais, então $\{t_n\}$ é de Cauchy. Escrevendo $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ teremos $(m > n)$

$$|s_m - s_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m|$$
$$\leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_m| = |t_m - t_n|$$

ou seja $\{s_n\}$ é de Cauchy e portanto convergente. podemos concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} z$ converge

Exemplos (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2+i}$ converge

pois $\left|\frac{i^k}{k^2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^4}} = \frac{1}{k^2}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k+i|}$ diverge

Funções contínuas

Uma função a valores complexos $f = f(z)$ definida em uma vizinhança do ponto z_0 (vizinhança é apenas um outro nome para um aberto contendo z_0) é contínua no ponto z_0 se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

E dizemos que f é contínua no aberto $D \subset \mathbb{C}$ se f for contínua em todos os pontos $z \in D$.

Proposição: f é contínua no ponto $z_0 \iff$ para qualquer sequência $\{z_n\}$ com $z_n \longrightarrow z_0$ tivermos $f(z_n) \longrightarrow f(z_0)$.

Obs: Se escrevermos as partes real e imaginária de f

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

sendo u e v funções reais de duas variáveis, é claro que f é contínua se, e somente se u e v são contínuas.

exemplo. O polinômio $p(x,y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, x^j y^k$ é contínuo no plano todo

A função $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$

é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obviamente valem os resultados clássicos de continuidade, tais como: soma, produto e quociente (denominador não nulo) de funções contínuas é uma função contínua.

Dizemos que uma função f é de classe C^n se suas partes real e imaginárias (ambas) possuem derivadas parciais contínuas até a n-ésima ordem.

Convergência Uniforme

Uma sequência de funções $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em D se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)|, \ \forall z \in D$$

Proposição: Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas em D e converge uniformemente para uma função $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ então f é contínua.

Para provar esse resultado, basta observar que essa proposição vale para as partes real e imaginária de f.

Teste M de Weierstrass: Seja $f_k: D \longrightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções contínuas em D $(k \in \mathbb{N})$, tal que $|f_k(z)| \leq M_k$, $\forall z \in D$. Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge então a série de funções $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ é uniformemente convergente em D, em particular, o limite $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua.

Exemplo: $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ é contínua em $D = B(0, \frac{1}{2})$ pois

$$|k z^k| = k|z|^k \leq k \frac{1}{2^k}, \ \forall z \in D \ \text{e} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < +\infty.$$