Máximo e mínimo de funções analíticas

Aula 7
01
14/01

Teorema (valor médio para funções holomorfas)
Se f é analítica na região G e $a \in G$ então $f(a)$ é o valor médio de f sobre a fronteira de qualquer disco $D(a;r) \subset G$, ou seja

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta})\, d\theta$$

Dem: Basta parametrizar $\partial D(a,r)$ por $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ então

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(\theta))}{\gamma(\theta)-a}\gamma'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta. \blacksquare$$

Dizemos que uma função complexa f tem um máximo local no ponto a se $|f(a)| \ge |f(z)|$, para qualquer z numa vizinhança de a, ou seja, se $\exists \delta > 0$; $|f(a)| \ge |f(z)|$, $\forall z \in B(a;\delta)$.
A definição de mínimo local é similar.

Teorema do Módulo Máximo: Uma função analítica não constante definida em uma região G não possui pontos de máximo em G, ou seja, $\forall a \in G$, $\forall \delta > 0$, $\exists w \in B(a,\delta) \cap D$; $|f(w)| > |f(a)|$.

Dem: a prova consiste em usar o TVM numa para achar um ponto na fronteira da bola com módulo maior que $|f(a)|$. Em detalhes:

Seja $a \in G$ um ponto qualquer e $r > 0$ tal que $\overline{B}(a,r) \subset G$, então

$$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|\, d\theta \le \max_{0\le\theta\le 2\pi} |f(a+re^{i\theta})| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$$

Como $\theta \mapsto |f(a+re^{i\theta})|$ é contínua no compacto $[0,2\pi]$, então $\exists \theta_0 \in [0,2\pi]$ tal que $|f(a+re^{i\theta_0})| = \max\{|f(a+re^{i\theta})|;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.
Denotando $w \doteq a + re^{i\theta_0}$, segue o resultado. $\blacksquare$

Corolário: Se f é analítica na região G e possui um ponto de máximo em G então f é constante

Observação: Se f é analítica na região limitada G e contínua em $\overline{G}$ então f assume um máximo em $\overline{G}$. Pelo teorema do modulo máximo, esse ponto de máximo está na fronteira ∂G.

Teorema do Módulo Mínimo: Seja f uma função analítica não constante definida em uma região G, então

f tem um mínimo em $G \iff f$ possui algum zero em G.

Dem: A implicação $(\Leftarrow)$ é óbvia. Para provar $(\Rightarrow)$, suponha que $f(z) \neq 0, \forall z \in G$ e considere a função $g(z) = 1/f(z)$. Como g é analítica e não constante na região G, então g não possui máximo $\iff f$ não possui mínimo em G. ■

No estudo de funções de variáveis reais, os pontos de máximo e de mínimo de funções diferenciáveis estão entre os pontos críticos da função, ou seja, pontos em que a derivada é nula. O teorema abaixo vai na direção oposta a esse conceito:

Teorema: Seja f uma função analítica não constante em G e suponha a bola fechada $\overline{B}(a,R) \subset G$. Se f assume o máximo em um ponto $z_0 \in \partial \overline{B}(a,r)$ então $f'(z_0) \neq 0$.

Dem (Pólya-Szegö - Problems and Theorems in Analysis I, Springer, 1972)

Esse teorema garante que $|f|$ não pode assumir um máximo em um ponto crítico e, é igualmente verdade que $|f|$ não pode ter um mínimo diferente de zero em um ponto crítico. Essencialmente, isso significa que os pontos críticos de uma função analítica (exceto os zeros de f) coincidem com os pontos sela de f.

Definição: Dizemos que $z_0 \in G$ é um ponto sela da função analítica $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$, se z_0 é ponto sela da função $|f| = g$, ou seja, se g é diferenciável em z_0 com $\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = 0$, mas z_0 não é máximo nem mínimo local de g.

Teorema: z_0 é ponto sela da função analítica $f \iff f'(z_0) = 0$ e $f(z_0) \neq 0$.

Dem: Escreva $f = u + iv$, com $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ e $g = |f|$.

($\Rightarrow$) Suponha que z_0 é ponto sela de f então: (i) $g = |f|$ é diferenciável em z_0; (ii) $g(z_0) \neq 0$; e (iii) $g_x = \dfrac{u u_x + v v_x}{g}$ e $g_y = \dfrac{u u_y + v v_y}{g}$ (prove essas 3 afirmações)

Como, por hipótese, $g_x(z_0) = 0 = g_y(z_0)$ então

$$\begin{cases} u(z_0)u_x(z_0) + u(z_0)v_x(z_0) = 0 \\ u(z_0)u_y(z_0) + u(z_0)u_y(z_0) = 0 \end{cases}$$

Como $|u(z_0)|^2 + |v(z_0)|^2 = |f(z_0)|^2 \neq 0$ então o sistema acima tem uma solução $(u(z_0), v(z_0)) \neq (0,0)$, logo o determinante

$$\begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, $u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0) = 0$. Pelas equações de Cauchy-Riemann temos $|f_x(z_0)|^2 = (u_x(z_0))^2 + (u_y(z_0))^2 = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Se $f'(z_0) = 0$ então $u_x(z_0) = v_x(z_0) = 0$ e $u_y(z_0) = v_y(z_0) = 0$. Pela afirmação (iii) logo acima $g_x(z_0) = g_y(z_0) = 0$ e g é diferenciável (derivadas parciais contínuas) e o teorema de Pólya-Szegö garante que z_0 não é máximo nem mínimo

Observação 1: É claro que se $f(z_0) = 0$ então $g = |f|$ tem um mínimo em z_0. Se ocorrer $f'(z_0) = 0$ (por exemplo: $f(z) = (z - z_0)^2$) teremos $g = |f|$ diferenciável em z_0 com $g_x(z_0) = g_y(z_0) = 0$ (para provar isso precisa mostrar que a série de potências de f em torno de z_0, com z próximo de z_0 e $M > 0$ conveniente satisfaz

$$\big||f(z)| - |f(z_0)|\big| \leq |f(z) - f(z_0)| \leq M|z - z_0|^2$$

Observação 2: Se $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) \neq 0$ então $g = |f|$ não é diferenciável em z_0 (provado por Bak-Ding-Newman em American Math. Monthly 114, 2007)

(exemplo: $f(z) = (z - i)(z - 1)^2$ tem um ponto sela em $z = 1$ e não é diferenciável em $z = i$)

Teorema da Aplicação Aberta: A imagem de um aberto por uma função analítica é um aberto

Dem (Carathéodory) Basta provar que se f é analítica e não constante então a imagem do disco aberto $D(a,r)$ contém um disco centrado em $f(a)$

Sem perda de generalidade podemos supor $f(a)=0$

Como $f \not\equiv 0$ então existe um círculo C centrado em a tal que $f(z) \neq 0, \forall z \in C$ (note que, se tal círculo não existisse, tomando $r_n = 1/n$, o círculo C_n de centro na origem e raio $1/n$ teria um ponto z_n no qual $f(z_n)=0$. Logo $f(z_n)=0, \forall n$ e o conjunto de zeros de f teria um ponto de acumulação, o que implicaria em $f \equiv 0$)

Agora seja $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{z \in C} |f(z)|$, então $f(D) \supset D(0,\varepsilon)$, sendo D o disco delimitado pelo círculo C.

Para provar isso, seja $w \in \overline{B}(0,\varepsilon)$ e considere a função $f(z)-w$. Se $z \in C$ então

$|f(z)-w| \geq |f(z)| - |w| \geq \varepsilon$ e $|f(a)-w| = |-w| < \varepsilon$

Logo $|f(z)-w|$ assume o mínimo em algum ponto dentro de D. Segue do teorema do módulo mínimo que $f(z)-w$ deve ter um zero em D (aqui w é um ponto na imagem de f). ■

Lema de Schwarz: Se f é analítica no disco unitário $D(0,1)$, $|f(z)|<1, \forall z \in D(0,1)$ e $f(0)=0$ então

(i) $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D(0,1)$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$

(iii) vale a igualdade em (i) e (ii) $\iff f(z) = z e^{i\theta}$

Dem: considere a função $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, para $0<|z|<1$ e $g(0)=f'(0)$

Como $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$ sobre o círculo $\{|z|=r\}$, fazendo $r \to 1$ e aplicando o teorema do módulo máximo temos $|g(z)| \leq 1$ no disco todo, provando (i) e (ii).

Além disso, se ocorrer $|g(z_0)| = 1$, para algum z_0 com $|z_0|<1$ então pelo teorema do módulo máximo teremos g constante (de módulo 1) e portanto $f(z) = e^{i\theta} z$, para algum θ.