1ª Prova - Complementos da Matemática - Tarde

1. Demonstre os seguintes teoremas com a técnica indicada:

   (a) $(q \to \sim p) \Leftrightarrow \sim (p \ \wedge q)$ [tabela verdade];

   (b) $(p \to r) \vee (q \to r) \Leftrightarrow \ (p \wedge q \to r)$ [técnica dedutiva];

   (c) $\Big((x \neq 0) \wedge (xy = 0) \to (y = 0)\Big) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (xy \neq 0)$ [técnica dedutiva].

2. Faça a negação lógica da seguinte proposição com quantificadores

   (a) $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{N},\ a > 1 \Rightarrow |a - b| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) $\forall (a,b) \in A,\ \exists r > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(x,y) - (a,b)| < r \ \Rightarrow \ (x,y) \in A$.

3. Em cada uma das frases abaixo: traduza para a linguagem simbólica, a seguir faça a negação e finalmente reescreva essas negações usando o mesmo tipo de linguagem em que foram originalmente enunciadas.

   (a) Para cada número racional r, existem números inteiros a e b tais que $r = \dfrac{a}{b}$.

   (b) Existe um número real e tal que, para qualquer real a tem-se $a.e = a$.

4. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Usando a técnica de demonstração por redução ao absurdo mostre que:

   (a) $\varnothing \subset A$

   (b) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$