2^{a} Prova de Análise Complexa

17/02/2016

1. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$

   A função $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ é meromorfa com polos nos zeros do denominador (raízes quartas de -1), ou seja, nos pontos $e^{\frac{ik\pi}{4}}$, para $k = \pm 1, \pm 3$. Esta integral se encaixa no modelo previsto na situação 1 (ver notas da aula 14)

   Os polos de f no semiplano superior são $e^{\frac{i\pi}{4}}$ e $e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Como $\text{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) = e^{\frac{-i\pi}{4}}$ e $\text{Res}(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}) = e^{\frac{-3i\pi}{4}}$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = 2\pi i \left(\text{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) + \text{Res}(f, e^{\frac{3i\pi}{4}})\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

2. Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, para $0 < a < 1$.

   Considere a função $f(z) = \frac{e^{az}}{e^z+1}$, cujos polos são os zeros do denominador, ou seja, os pontos $z = i\pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para o caminho de integração vamos escolher o retângulo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, sendo

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) =& t, & -r \le t \le r; \qquad & \gamma_2(t) = r + it, & 0 \le t \le 2\pi \\ \gamma_3(t) =& t + 2\pi i, & -r \le t \le r; \qquad & \gamma_4(t) = -r + it, & 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

   Assim f terá apenas um polo na região dentro da região delimitada por γ. Como $\text{Res}(f, \pi i) = -e^{ia\pi}$ então

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, \pi i) = -2\pi i e^{ia\pi}$$

   Por outro lado

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz - \int_{\gamma_4} f(z)dz \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{e^{at}}{e^t+1}dt + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}idt - \int_{-r}^{r} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{e^{t+2\pi i}+1}dt - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}idt \\ &= (1 - e^{2a\pi i}) \int_{-r}^{r} \frac{e^{at}}{e^t+1}dt + i\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}dt - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}dt\right) \end{aligned}$$

   ou seja

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-r}^{r} \frac{e^{at}}{e^t+1}dt = \int_\gamma f(z)dz - i\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}dt - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}dt\right)$$

e

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{at}}{e^t+1}dt = \frac{-2\pi i e^{ia\pi}}{1-e^{2a\pi i}} - \frac{i}{1-e^{2a\pi i}}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}dt - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}dt\right)$$

Agora note que sen $(\pi a) = \frac{1}{2i}(e^{ia\pi} - e^{ia\pi}) = \frac{-1}{2ie^{ia\pi}}\left(1 - e^{2ia\pi}\right)$, logo

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{at}}{e^t+1}dt = \frac{\pi}{\text{sen }(\pi a)} - \frac{i}{1-e^{2a\pi i}}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}dt - \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}dt\right)$$

Falta só mostrar que as integrais do lado direito tendem a zero, quando $r \to \infty$. Mas

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(r+it)}}{e^{r+it}+1}dt\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{ar}}{e^r-1}dt = \frac{2\pi e^{ar}}{e^r-1} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

e

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-r+it)}}{e^{-r+it}+1}dt\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ar}}{e^{-r}-1}dt = \frac{2\pi e^{-ar}}{1-e^{-r}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Seja $G \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica módulo singularidades isoladas, cujo conjunto singular é Σ. Dada uma curva suave γ em $G \setminus \Sigma$, homóloga a zero em G, prove o conjunto $F = \{a \in \Sigma : n(\gamma; a) \neq 0\}$ é finito.

   Suponha, por absurdo, que F é infinito. Denotando por U_∞ a única componente conexa não limitada de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, teremos $\mathbb{C} \setminus U_\infty$ limitado.
   Como $n(\gamma, z) = 0, \forall z \in U_\infty$, então $F \cap U_\infty = \varnothing$. Daqui segue que F é limitado e infinito e, portanto, F tem ponto de acumulação.
   Seja $a \in G$ ponto de acumulação de F, Como $F \subset \Sigma$ e Σ não pode ter ponto de acumulação, então $a \notin \Sigma \Rightarrow a \notin F \Rightarrow n(\gamma, a) = 0$.
   Segue da continuidade da função $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} \mapsto n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$, que existe $\delta > 0$ tal que $n(\gamma, z) = 0, \forall z \in B(a, \delta) \Rightarrow B(a, \delta) \cap F = \varnothing \Rightarrow$ a não é ponto de acumação de F (contradição).

4. Seja G um subconjunto aberto, conexo e limitado do plano complexo e $u : \bar{G} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que possui a propriedade do valor médio em G.

   (a) Se $u|_{\partial G} \equiv 0$, mostre que u é a função identicamente nula em G;
   Como G é limitado então $\bar{G}$ é compacto e, por continuidade, existem $a, b \in \bar{G}$ tais que $u(a) \le u(z) \le u(b), \forall z \in \bar{G}$. Se $b \in G$, pelo princípio do máximo teremos u constante em G. Como u é contínua em $\bar{G}$ e $u|_{\partial G} \equiv 0$, então $u \equiv 0$ em $\bar{G}$, e portanto em G. Analogamente, se $a \in G$, pelo princípio do mínimo teremos $u \equiv 0$ em G. Finalmente se $a, b \in \partial G$, teremos $0 = u(a) = u(b)$ e $u \equiv 0$ em G.

   (b) Mostre que u é harmônica em G.
   Seja $a \in G$ e $r > 0$ tais que $\bar{B}(a, r) \subset G$. Pelo problema de Dirichlet no disco, existe uma funcão contínua em $\bar{B}(a, r)$ e harmônica em $B(a, r)$ tal que $v|_{\partial G} = u|_{\partial G}$. Como v é harmônica então v tem a propriedade do valor médio, mas por hipótese u também tem a propriedade do valor médio, e $(v - u)|_{\partial G} \equiv 0$, segue do item anterior que $u \equiv v$ em G. Em particular, u é harmônica.

(c) Sob quais condições o conjunto $N = \{z \in G; u_x(z) = u_y(z) = 0\}$ pode ter ponto de acumulação?

Considere a função $f(z) = u_x(z) + iu_y(z)$, com $z \in G$. Observe que as partes real e imaginária de f tem derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (pois u é harmônica) logo f é analítica em G. Como N é o conjunto de zeros de f, então

N tem ponto de acumulação $\Leftrightarrow f \equiv 0$ em $G \Leftrightarrow u$ é constante em G.

5. Seja $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o disco unitário, G um conjunto aberto contendo $\bar{D}$ e $u : G \to \mathbb{R}$ uma função harmônica tal que $u(0) = 1$.

(a) Mostre que $u\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 3$.

Pela fórmula de Poisson

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+1/2}{e^{it}-1/2}\right) u(e^{it})dt,$$

mas

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+1/2}{e^{it}-1/2}\right) \leq \left|\frac{e^{it}+1/2}{e^{it}-1/2}\right| = \frac{|e^{it}+1/2|}{|e^{it}-1/2|} \leq \frac{3/2}{1/2} = 3.$$

Logo

$$u\left(\frac{1}{2}\right) \leq 3\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt\right) = 3u(0) = 3.$$

(b) Dê um exemplo em que ocorre a igualdade no item acima, ou seja, $u(\frac{1}{2}) = 3$

Basta tomar $u(x,y) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+x+iy}{1-(x+iy)}\right)$.