2ª Prova - Complementos da Matemática - Noite - Gabarito

1. Considere o conjunto $A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas alternativas abaixo. Não é preciso justificar: cada item 0,25 pt - 3,0 pt

   a. $0 \in A$. (F)
   b. $\{0\} \in A$. (V)
   c. $\{0\} \subset A$. (F)
   d. $\{1\} \in A$. (V)
   e. $\{1\} \subset A$. (F)
   f. $1 \in A$. (F)
   g. $\{0, 1\} \subset A$. (F)
   h. $\{\{0\}, \{1\}\} \subset A$. (V)
   i. $\{\{1\}\} \subset A$. (V)
   j. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. (V)
   k. $\varnothing \subset \mathcal{P}(A)$. (V)
   l. $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(A)$. (V)

2. Dados $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$. Encontre: cada item 0,3 pt - 3,0 pt

   a. $(B - A) \cap C = \{2, 3\}$.

   b. $B - (A \cap C) = B$, pois $A \cap C = \varnothing$.

   c. $(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$.

   d. $A \cap (B \cup C) = \{1\}$.

   e. $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

   f. $B^2 - C^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$.

   g. $C^2 - B^2 = \{(2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

   h. $\mathcal{P}(A^2) = \Big\{\varnothing, A^2, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\}\Big\}$.

   i. $\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(C) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

   j. $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

3. Prove as afirmações abaixo. cada item 1,0 pt - 3,0 pt

   a. $A^c \subset B^c \Leftrightarrow A \cup B = A$.

   Basta observar que $A^c \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$.

b. $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ e $B = \varnothing$.

A necessidade é trivial. Para provar a suficiência, suponha por absurdo que $A \neq \varnothing$ ou $B \neq \varnothing$ Em qualquer caso teríamos $A \cup B \neq \varnothing$, o que contradiz a hipótese.

c. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

4. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos. Mostre que: item a. 1,0 pt, b. 2,0 pt

a. $A - (B_1 \cap B_2) = (A - B_1) \cup (A - B_2)$.

$x \in A - (B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B_1 \cap B_2)$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim [x \in (B_1 \cap B_2)] \Leftrightarrow x \in A \wedge \sim [x \in B_1 \wedge x \in B_2]$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge [x \notin B_1 \vee x \notin B_2] \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B_1) \vee (x \in A \wedge x \notin B_2)$
$\Leftrightarrow (x \in A - B_1) \vee (x \in A - B_2) \Leftrightarrow (x \in A - B_1) \cup (A - B_2)$

b. $A - \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A - B_n)$.

$x \in A - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \Leftrightarrow x \in A \wedge \sim \left[x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right]$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim \left[\forall n \in \mathbb{N}, x \in B_n\right] \Leftrightarrow x \in A \wedge \left[\exists n \in \mathbb{N}, x \notin B_n\right]$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A \wedge x \notin B_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in A - B_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A - B_n\right)$