3^{a} Prova - Complementos da Matemática - Relações e Funções - Noite

1. Verifique (demonstrando ou dando um contra-exemplo) se as relações abaixo satisfazem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

   (a) $\forall m, n \in \mathbb{Z},\ m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m - n$ é ímpar;

   - $\mathcal{R}$ não é reflexiva: pois $1 + 1 = 2$ não é ímpar, ou seja, $1 \not\mathcal{R} 1$.
   - $\mathcal{R}$ é simétrica: De fato, se $a\mathcal{R}b \Rightarrow a - b$ é ímpar $\Rightarrow b - a = -(a - b)$ é ímpar, e portanto $b\mathcal{R}a$.
   - $\mathcal{R}$ não é transitiva: pois $3\mathcal{R}2,\ 2\mathcal{R}1$ e $3 \not\mathcal{R} 1$.

   (b) $\forall A, B \subset \mathbb{N}$ não vazios, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$

   - $\mathcal{R}$ é reflexiva: pois para todo $A \neq \varnothing$ temos $A \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow A\mathcal{R}A$.
   - $\mathcal{R}$ é simétrica: De fato, se $a\mathcal{R}b \Rightarrow a - b$ é ímpar $\Rightarrow b - a = -(a - b)$ é ímpar, e portanto $b\mathcal{R}a$.
   - $\mathcal{R}$ não é transitiva: pois $3\mathcal{R}2,\ 2\mathcal{R}1$ e $3 \not\mathcal{R} 1$.

2. Defina uma relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^*$ da seguinte forma:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \cdot b > 0.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$;

   Como $a \cdot a = a^2 > 0$, para todo $a \neq 0$ então $a\mathcal{R}a$ e $\mathcal{R}$ é reflexiva.

   Se $a\mathcal{R}b$, então $a \cdot b > 0 \Rightarrow b \cdot a > 0 \Rightarrow b\mathcal{R}a$, ou seja, $\mathcal{R}$ é simétrica.

   Se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a \cdot b > 0$ e $b \cdot c > 0 \Rightarrow (a \cdot b)(b \cdot c) > 0$. Como $b^2 > 0$ então $a \cdot c > 0$, logo $\mathcal{R}$ é transitiva. Daqui segue que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

   (b) Obtenha as classes de equivalência $[2]_{\mathcal{R}}, [5]_{\mathcal{R}}$ e $[-1]_{\mathcal{R}}$;

   $[2]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^*; x\mathcal{R}2\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x \cdot 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x > 0\} = \mathbb{R}^*_+$;

   $[5]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^*; x\mathcal{R}5\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x \cdot 5 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x > 0\} = \mathbb{R}^*_+$;

   $[-1]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^*; x\mathcal{R}(-1)\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x \cdot (-1) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^*; x < 0\} = \mathbb{R}^*_-$.

   (c) Descreva o conjunto quociente $\mathbb{R}^*/_{\mathcal{R}}$.

   Pelo item anterior observamos que esta relação possui apenas duas classe de equivalência: reais positivos $\mathbb{R}^*_+$ e reais negativos $\mathbb{R}^*_-$. Logo o conjunto quociente é a família cosntitu ida apenas por estes dois conjuntos, ou seja, $\mathbb{R}^*/_{\mathcal{R}} = \{[a]_{\mathcal{R}}; a \in \mathbb{R}^*\} = \{\mathbb{R}^*_-, \mathbb{R}^*_+\}$.

3. Verifique se as funções abaixo são injetoras ou sobrejetoras provando ou exibindo um contra-exemplo.

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xy + z^2$.

   f não é injetiva, pois $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 0$.

   f é sobrejetiva: De fato, dado $t \in \mathbb{R}$, tome $(t, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ e teremos$f(t, 1, 0) = t.1 + 0^2 = t$.

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (1, t, t^2)$.

   f é injetiva: De fato, sejam $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $f(s) = f(t)$, então $(1, t, t^2) = (1, s, s^2) \Rightarrow s = t$.

   f não é sobrejetiva: De fato, para todo $t \in \mathbb{R}$ teremos $f(t) = (1, t, t^2) \neq (0, 0, 0)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2y + x^2$.

   (a) Obtenha as imagens diretas $f\big(\{(0, 0), (-1, 1), (-2, 2)\}\big)$ e $f\big([0, 1] \times [1, 2]\big)$.

   $f\big(\{(0, 0), (-1, 1), (-2, 2)\}\big) = \{f(0, 0), f(-1, 1), f(-2, 2)\} = \{0, -1\}$.

   Note que, se $0 \leq x \leq 1$ e $1 \leq y \leq 2$ então $0 \leq x^2 \leq 1$ e $2 \leq 2y \leq 4$. Somando as duas últimas desigualdades temos $2 \leq 2y + x^2 \leq 5$ e portanto $f\big([0, 1]^2\big) = \{f(x, y); x \in [0, 1] \text{ e } y \in [1, 2]\} = [2, 5]$.

   (b) Obtenha as imagens inversas $f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}(\{2\})$.

   $f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2/2\}$. e

   $f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x^2 = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2/2\}$.

5. Dadas $f : A \to B$ e $g : B \to C$, considere a função composta $g \circ f : A \to C$:

   (a) prove que se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva;

   Sejam $a_1 \neq a_2$ elementos de A. Pela injetividade de f temos $f(a_1) \neq f(a_2)$, e pela injetividade de g temos $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, ou seja $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$. Isso prova que $g \circ f$ é injetiva.

   (b) prove que se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva;

   Suponha, por absurdo, que f não é injetiva, neste caso existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 \neq a_2$ e $f(a_1) = f(a_2)$. Daqui segue que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, ou seja, $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ com $a_1 \neq a_2$, contradizendo o fato de $g \circ f$ ser injetiva.

   (c) dê um exemplo em que f e $g \circ f$ são injetivas, mas g não é injetiva;

   Tome $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Note que f é injetiva; g não é injetiva e que $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, para todo $x \in [0, +\infty)$, ou seja, $g \circ f$ é injetiva.