3ª Prova - Complementos da Matemática - Relações e Funções - Tarde

1. Considere a seguinte relação definida em $\mathbb{Z}$:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a+b \text{ é múltiplo de } 3.$$

Verifique quais das propriedades (reflexividade, simetria e transitividade) são satisfeitas e quais falham. Forneça uma demonstração para as propriedades válidas e um contra-exemplo para as propriedades que falham.

2. Defina uma relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$(x,y)\mathcal{R}(a,b) \Longleftrightarrow y-2x=b-2a.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$;

   (b) Obtenha as classes de equivalência $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0,1)]_{\mathcal{R}}$ e $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$;

   (c) Escreva o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}}$ e descreva-o geometricamente.

3. Verifique se as funções abaixo são injetoras ou sobrejetoras provando ou exibindo um contra-exemplo.

   (a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-y^2$.

   (b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(s,t)=(s,s+1,t)$.

4. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=2x+y$.

   (a) Obtenha as imagens diretas $f\big(\{(1,-2),(0,0)\}\big)$ e $f\big([-1,2]\times[2,3]\big)$.

   (b) Obtenha as imagens inversas $f^{-1}(\{1\})$ e $f^{-1}(\{2\})$.

5. Seja $f:A\to B$ uma função e $X,Y\subset A$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$

   (b) Se f é injetiva então $f(X\cap Y)\supset f(X)\cap f(Y)$.

   (c) Mostre que a inclusão do item anterior pode ser falsa sem a hipótese de injetividade sobre a f.