3ª Prova - Complementos da Matemática - Relações e Funções - Tarde

1. Considere a seguinte relação definida em $\mathbb{Z}$:

$$a\mathcal{R}b \;\Leftrightarrow\; a+b \;\text{ é múltiplo de 3.}$$

Verifique quais das propriedades (reflexividade, simetria e transitividade) são satisfeitas e quais falham. Forneça uma demonstração para as propriedades válidas e um contra-exemplo para as propriedades que falham.

- $\mathcal{R}$ não é reflexiva.
  Note que $2+2$ não é múltiplo de 3, ou seja, $2 \not\mathcal{R} 2$
- $\mathcal{R}$ é simétrica.
  De fato, se $a\mathcal{R}b \Rightarrow a+b$ é múltiplo de $3 \Rightarrow b+a$ é múltiplo de 3, e portanto $b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ não é transitiva.
  Basta ver que $1\mathcal{R}2$, $2\mathcal{R}4$ e $1 \not\mathcal{R} 4$.

2. Defina uma relação $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$(x,y)\mathcal{R}(a,b) \Longleftrightarrow y-2x = b-2a.$$

(a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$;

Como $y-2x = y-2x$, então $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R}$ é reflexiva. Agora, se $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$, então $y-2x = b-2a$, e portanto $b-2a = y-2x$, ou seja, $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$. Isso prova que $\mathcal{R}$ é simétrica. Para a transitividade, suponha que $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ e $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. Neste caso, $y-2x = b-2a$ e $b-2a = d-2c$, logo $y-2x = d-2c$ e portanto $(x,y)\mathcal{R}(c,d)$. Isso conclui a prova que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

(b) Obtenha as classes de equivalência $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, $[(0,1)]_{\mathcal{R}}$ e $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$;

$[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y)\mathcal{R}(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y-2x = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$;
$[(0,1)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y)\mathcal{R}(0,1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y-2x = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x+1\}$;
$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y)\mathcal{R}(1,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y-2x = -2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x-2\}$;

(c) Escreva o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}}$ e descreva-o geometricamente.

Note que cada classe de equivalência da relação $\mathcal{R}$ corresponde a uma reta do plano cartesiano paralela a reta $\rho : y = 2x$. Logo o conjunto quociente $\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}} = \{[(a,b)]_{\mathcal{R}}; (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ é a família de todas as retas paralelas a ρ.

3. Verifique se as funções abaixo são injetivas ou sobrejetivas provando ou exibindo contra-exemplo.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$.

   f não é injetiva: Basta ver que $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$.

   f é sobrejetiva: De fato, dado $z \geqslant 0$, basta tomar $x = \sqrt{z}$ e $y = 0$, assim teremos $f(x, 0) = f(\sqrt{z}, 0) = (\sqrt{z})^2 - 0^2 = z$. Agora, se $z < 0$ basta tomar $x = 0$ e $y = \sqrt{-z}$, assim teremos $f(0, y) = f(0, \sqrt{-z}) = 0^2 - (\sqrt{-z})^2 = z$.

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(s, t) = (s, s + 1, t)$.

   f é injetiva: De fato, sejam $(s, t), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(s, t) = f(a, b)$, temos $(s, s + 1, t) = (a, a + 1, b) \Rightarrow s = a$ e $t = b$, ou seja, $(s, t) = (a, b)$.

   f não é sobrejetiva: De fato, suponha que exista $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(s, t) = (0, 0, 0)$, Neste caso teremos $(s, s + 1, t + 1) = (0, 0, 0)$, ou seja $s = 0$ e $s + 1 = 0$, contradição.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x + y$.

   (a) Obtenha as imagens diretas $f\big(\{(1, -2), (0, 0)\}\big)$ e $f\big([-1, 2] \times [2, 3]\big)$.

   $f\big(\{(1, -2), (0, 0)\}\big) = \{f(1, -2), f(0, 0)\} = \{0\}$ e

   $f\big([-1, 2] \times [2, 3]\big) = \{f(x, y); x \in [-1, 2] \text{ e } y \in [2, 3]\} = [0, 7]$,

   pois $-1 \leq x \leq 2$ e $2 \leq y \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$ e $2 \leq y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{2x + y}_{f(x,y)} \leq 7$

   (b) Obtenha as imagens inversas $f^{-1}(\{1\})$ e $f^{-1}(\{2\})$.

   $f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - 2x\}$ e

   $f^{-1}(\{2\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 - 2x\}$.

   Que podem ser reescritos como $f^{-1}(\{1\}) = \{(x, 1-2x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $f^{-1}(\{2\}) = \{(x, 2-2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

5. Seja $f : A \to B$ uma função e $X, Y \subset A$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

   Como $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$ então $f(X \cap Y) \subset f(X)$ e $f(X \cap Y) \subset f(Y)$.

   Logo $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;

   (b) Se f é injetiva então $f(X \cap Y) \supset f(X) \cap f(Y)$.

   Se $y \in f(X) \cap f(Y)$ então $y \in f(X)$ e $y \in f(Y)$. Da definição de imagem direta obtemos $x_1 \in X$ e $x_2 \in Y$ tais que $y = f(x_1) \in f(X)$ e $y = f(x_2) \in f(Y)$. Como f é injetiva e $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Assim $x_1 \in X$ e $x_1 = x_2 \in Y \Rightarrow x_1 \in X \cap Y \Rightarrow y = f(x_1) \in f(X \cap Y)$.

   (c) Mostre que a inclusão do item anterior pode ser falsa sem a hipótese de injetividade sobre a f.

   Basta considerar a função constante 1, ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $X = [0, 1]$ e $Y = [2, 3]$ teremos $X \cap Y = \varnothing$, e portanto $f(X \cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing$, enquanto que $f(A) = f(B) = \{1\} \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \{1\}$.