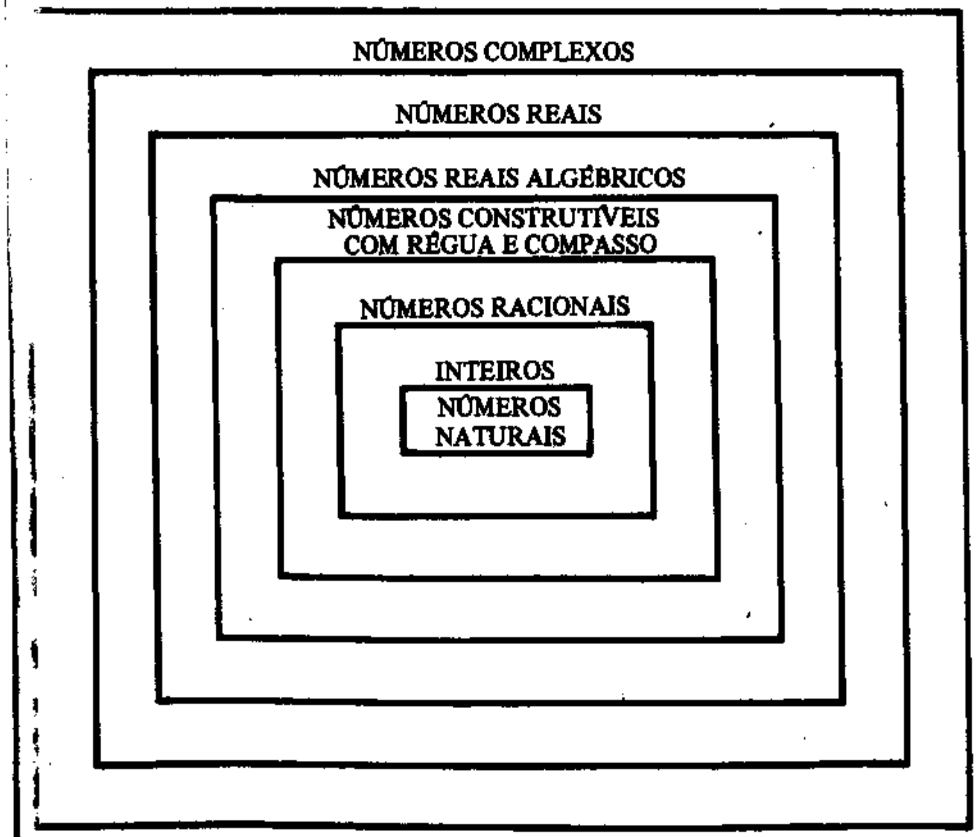
NÚMEROS:
RACIONAIS E IRRACIONAIS



NÚMEROS:
RACIONAIS E IRRACIONAIS

POR

Ivan Niven

Traduzido por Renate Watanabe

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Rio de Janeiro
1984

Título do original em inglês:

"Numbers: Rational and Irrational"

Publicado nos E.U.A. pela "Mathematical Association of America". Traduzido para o Português pela Professora Renate Watanabe e publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática em sua Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, com a devida autorização da Mathematical Association of America.

N734n Niven, Ivan Morton, 1915-
Números: racionais e irracionais. Trad. de Renate Watanabe. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984, c1961.
216p. ilust.
Título original: Numbers: rational and irrational.
511.145
t

Esta publicação foi financiada pela CAPES e pela FINEP.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Os números mais simples são os inteiros positivos: 1, 2, 3, etc., usados para contar. Estes são chamados *números naturais* e conhecidos há tantos milênios que o famoso matemático Kronecker supostamente disse: "Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem."

As necessidades básicas do dia-a-dia levaram à introdução de frações como 1/2, 2/3, 5/4, etc. Estes números são chamados *racionais*, não porque sejam "razoáveis" mas porque são razões de números inteiros.

Podemos pensar nos números naturais como representados por pontos de uma reta (Fig. 1), cada ponto separado do anterior por uma unidade de comprimento como, por exemplo, o número de centímetros ao longo de uma fita métrica.

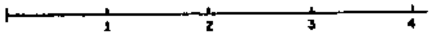


Figura 1

Podemos representar os números racionais na mesma reta (Fig. 2) e pensar neles como medindo frações de comprimento.

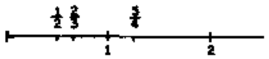


Figura 2

Muito mais tarde, os hindus inventaram o importantíssimo número 0 e, no início dos tempos modernos, algebristas italianos inventaram números negativos. Estes também podem ser representados em uma reta, como se vê na Fig. 3.

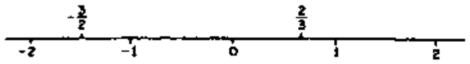


Figura 3

Quando os matemáticos falam de números racionais, eles querem dizer números inteiros (que podem ser representados como razões; por exemplo, $2 = 2/1 = 6/3$, etc) e frações, tanto negativos quanto positivos ou nulos. Os números inteiros positivos, negativos e zero são também chamados *inteiros*. Portanto a classe dos números racionais contém a classe dos inteiros.

A descoberta de que as frações não são suficientes para as necessidades da Geometria foi feita pelos gregos, há mais de 2500 anos. Eles observaram, para a sua surpresa e consternação, que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário (Fig. 4) não pode ser expresso por nenhum número racional (vamos provar isto no Capítulo 3). Hoje em dia, expressamos este fato dizendo que a raiz quadrada de 2 (que, de acordo com o Teorema de Pitágoras, é o comprimento da diagonal de um tal quadrado) é um *número irracional*. Isto significa, geometricamente, não existir uma unidade comum de comprimento, uma tira por mais curta que seja, que possa ser colocada um número inteiro de vezes sobre o lado e a diagonal de um quadrado. Em outras palavras, não existe unidade de comprimento, não importa quão pequena, da qual o lado e a diagonal de um quadrado sejam múltiplos inteiros. Para os gregos esta foi uma descoberta embaraçosa

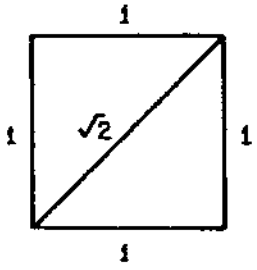


Figura 4

pois em muitas de suas demonstrações geométricas eles supunham que dois segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Havia, portanto, uma falha na estrutura lógica da Geometria Euclidiana - a discussão sobre razões e proporções de comprimentos estava incompleta. Na Secção 3.7 mostraremos como esta falha pode ser sanada e a teoria da proporção completada.

Analogamente, o perímetro de uma circunferência é um múltiplo irracional do diâmetro, a saber π. Outros números irracionais aparecem quando tentamos calcular os valores de algumas funções básicas em Matemática. Por exemplo, o cálculo dos valores de uma função trigonométrica, digamos sen x, para x igual a 60^0, nos leva ao número irracional $\sqrt{3}/2$; analogamente, o cálculo do valor da função logarítmica log x, mesmo para valores racionais de x, quase sempre nos leva a números irracionais. Apesar de os números que figuram em tabelas de logarítmos e funções trigonométricas serem ostensivamente racionais, na realidade são apenas aproximações racionais dos verdadeiros valores que, com raras exceções, são irracionais.

Fica claro, então, que números irracionais ocorrem naturalmente e de várias maneiras na Matemática Elementar.

Os *números reais* são todos os números racionais e irracionais e formam o sistema de números central da Matemática. Em Geometria, qualquer discussão de comprimentos, áreas ou volumes leva imediatamente aos números reais. A Geometria oferece, de fato, um esquema simples e intuitivo para descrever os números reais, i.e., os números necessários para medir todos os possíveis comprimentos em termos de uma dada unidade de comprimento. Se novamente considerarmos a representação dos números como pontos de uma reta, veremos que, apesar de qualquer segmento, não importa quão pequeno, conter uma infinidade de pontos racionais, existem muitos outros pontos (tais como $\sqrt{2}$, π, etc.) medindo comprimentos, que não podem ser expressos por números racionais. Mas se considerarmos os números reais, todo ponto da reta corresponderá a exatamente um número real e todo número real corresponderá a exatamente um ponto da reta. O fato de *todos* os comprimentos poderem ser expressos como números reais é conhecido como a *propriedade de completeza* destes números e todo o desenvolvimento da Análise Matemática depende desta propriedade.

Portanto, há duas espécies de números reais: os racionais e os irracionais. Existe uma outra separação, muito mais recente, dos números reais, em duas categorias: os números *algébricos* e os *números transcendentes*. Um número real se diz algébrico se satisfizer alguma equação algébrica com coeficientes inteiros. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número algébrico, porque satisfaz $x^2 - 2 = 0$. Se um número não for algébrico, ele será transcendente. Com esta definição, não fica claro que existam números transcendentes, isto é, números não algébricos. Em 1851, o matemático francês Liouville estabeleceu a existência de números transcendentes. Ele o fez exibindo certos números que provou serem não algébricos. No Capítulo 7, vamos seguir o método de Liouville para estabelecer a existência de números transcendentes.

Mais tarde, ainda no século XIX, provou-se que π é um número transcendente e este resultado resolveu, de vez, um problema antigo de construção geométrica conhecido como a "quadratura do círculo". Isto será discutido no Capítulo 5. Um outro avanço, no século XIX, foi feito por Cantor, um matemático alemão, que demonstrou a existência de números transcendentes por um caminho inteiramente diferente. Apesar de o método de Cantor, em contraste com o de Liouville, não exibir um número transcendente de forma explícita, tem a vantagem de demonstrar que, em certo sentido, há muito mais números transcendentes do que algébricos. Uma tal afirmação requer a comparação de classes infinitas, pois existem infinitos números algébricos e infinitos números transcendentes. Estas idéias fogem um pouco do tema central deste livro razão por que a prova da existência de números transcendentes, de Cantor, é dada no Apêndice C.

O plano do livro é apresentar os números naturais, inteiros, racionais e reais nos primeiros três capítulos. Em seguida, no Capítulo 4, é dado um método padrão para identificar números irracionais. O Capítulo 5 trata dos chamados números trigonométricos e logarítmicos, isto é, daqueles números cujos valores são dados aproximadamente nas tabelas de logaritmos e de funções trigonométricas. O Capítulo 6 trata do problema de quão próximo é possível chegar de um número irracional, usando números racionais. Este capítulo é mais difícil e especializado do que os anteriores. Foi incluído para dar ao leitor uma oportunidade de explorar argumentos matemáticos de natureza nova.

O Capítulo 7 e o Apêndice C oferecem duas demonstrações, inteiramente independentes, da existência de números transcendentes, o Capítulo 7, pelo método de Liouville e o Apêndice C, pelo método de Cantor. As técnicas são acentuadamente diferentes e será compensador acompanhar cada uma. A demonstração do Capítulo 7, é carregada de pormenores técnicos inevitáveis e, ainda mais do que em capítulos anteriores, você terá que usar lápis e papel para acompanhar os argumentos. De fato, é possível que você ache os Capítulos de 1 a 5 não muito complicados, o Capítulo 6 bastante difícil e o Capítulo 7 virtualmente impossível. Se este for o caso sugere-se adiar o estudo do Capítulo 7 até adquirir maior experiência matemática. Por outro lado, quem encontrar pouca dificuldade nos Capítulos 1 a 5, talvez prefira ler o Capítulo 7 antes do Capítulo 6. Na verdade, o Capítulo 7 é independente do resto do livro, salvo por um resultado bem conhecido sobre desigualdades, dado na Secção 6.1.

O apêndice C pode ser lido independentemente do Capítulo 7, mas o Teorema 7.2 será necessário. A quem não estiver familiarizado com a teoria dos conjuntos, as idéias do Apêndice C parecerão muito novas.

Para a leitura do livro não é necessário o Apêndice A, sobre a existência de infinitos números primos, que foi incluído por sua pertinência ao tema central e por datar de Euclides esta demonstração tão elegante. Por outro lado, o Apêndice B, sobre o teorema fundamental da aritmética, é essencial para nossa argumentação, principalmente nos Capítulos 4 e 5; a demonstração deste teorema foi relegada a um apêndice por ser um pouco mais longa e difícil do que as demais demonstrações dos primeiros cinco capítulos. O leitor matematicamente inexperiente poderá simplesmente acreditar no teorema fundamental da aritmética.

No fim das secções há muitos exercícios; o leitor deverá tentar fazer um bom número para testar sua compreensão do texto. (Não se pode aprender Matemática, vendo como os outros a fazem!). Alguns problemas têm uma estrela, indicando maior dificuldade. O leitor não deve necessariamente se sentir frustrado se não conseguir resolver todos estes. Muitas vezes, o sucesso vai depender de sua maturidade matemática, isto é, de sua familiaridade com uma coleção bastante ampla de procedimentos matemáticos provenientes de seus outros estudos de Matemática. As respostas dos problemas, bem como sugestões para resolver alguns mais difíceis são dadas no fim do livro.

O sistema de números reais - racionais e irracionais - - pode ser abordado em vários níveis de *rigor* (a palavra "rigor" é o termo técnico usado em Matemática para indicar o cuidado lógico no desenvolvimento de um tópico, em contraste com uma posição mais *intuitiva*, onde afirmações são aceitas como corretas por parecerem razoáveis ou evidentes). É nossa intenção fazer uma apresentação do assunto de um modo bastante intuitivo. Por isso, não oferecemos axiomas ou postulados como base para o estudo. O futuro matemático a cujas mãos este livro venha a chegar dese jar a examinar um dia algum desenvolvimento axiomático cuidadoso do sistema de números reais. Por quê? O motivo é que nosso ponto de vista aqui é tão descritivo que deixará algumas questões básicas sem resposta. Por exemplo, no Capítulo 3 dizemos que os números reais podem ser descritos deste modo, daquele modo e de outro modo. Mas como poderemos ter certeza de que esses vários modos são descrições do mesmo sistema? Para dar um exemplo mais concreto de uma questão que não respondemos neste livro: como sabemos que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ou que $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$? Para responder tais questões, é necessário que seja dada uma definição precisa das operações com números reais. Isto não será feito aqui, pois não é tão simples como possa parecer e é melhor adiar este tipo de tratamento até que o estudante não só tenha maior habilidade matemática, mas também possa apreciar melhor a natureza e o significado de uma demonstração matemática. Como disse o matemático americano E. H. Moore: "Sufficient unto the day is the rigor thereof" (este rigor é suficiente para hoje).

"A natureza e o significado de uma demonstração matemática!" Não é possível dar aqui e agora uma descrição precisa do que seja uma demonstração e nisto reside um dos maiores fantasmas para principiantes em Matemática. Se a natureza de uma demonstração não pode ser descrita ou formulada em detalhe, como pode alguém aprender a fazer demonstrações? Para usar uma analogia supersimplificada: aprende-se a fazer demonstrações do mesmo modo pelo qual uma criança aprende a identificar cores, isto é, observando alguém identificar coisas verdes, azuis, etc. e imitando então o que se acabou de observar. Pode haver falhas no início, causadas por uma compreensão inadequada das categorias e padrões mas, finalmente, quem está aprendendo pega o jeito. E é o que acontece com o mistério das demonstrações matemáticas. Com intuito de familiarizar o leitor com noções e métodos de demonstração, algumas de nossas discussões tentam esclarecer padrões de técnicas de demonstração. Assim, apesar de não termos uma receita infalível para distinguir demonstrações válidas das não-válidas, falamos do assunto e esperamos que o leitor, antes do término do livro, não só reconheça demonstrações válidas, como também encontre prazer em construir algumas por si próprio.

CAPÍTULO 1

NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

O sistema numérico da Matemática começa com os números usados para contar,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Estes são os números inteiros positivos que são chamados *números naturais*. O menor número natural é 1, mas não existe um maior número natural, porque por maior que se escolha um número, existem outros que são maiores ainda. Por isso, dizemos que existem infinitos números naturais.

A soma de dois números naturais é um número natural; por exemplo, $4 + 4 = 8$ e $4 + 7 = 11$. Analogamente, o produto de dois números naturais é um número natural; por exemplo, $4 \times 7 = 28$. Estas duas propriedades podem ser enunciadas abreviadamente, dizendo que os números naturais são *fechados em relação à adição* e *fechados em relação à multiplicação*. Em outras palavras, se tivermos uma coleção de objetos (digamos, o conjunto dos números naturais) e uma operação (digamos, adição) tais que, quaisquer que sejam os elementos do nosso conjunto a serem operados (digamos, 4 e 7), o resultado é novamente um elemento da coleção original, diremos que o conjunto é fechado em relação àquela operação. Consideremos apenas os números 1, 2, 3. Este conjunto de

Observe que 1 não está na relação dos primos. O fato de 1 não ser primo, é uma convenção matemática ou, em outras palavras, é uma questão de definição. Os matemáticos convencionaram não chamar 1 de primo. A decisão poderia ter sido a contrária, isto é, incluir 1 entre os primos. Mas com a exclusão do 1, torna-se possível enunciar proposições a respeito de primos, sem fazer exceções ou dar qualificações, como mostraremos mais adiante.

Problemas - Lista 1

(Nas listas, estrelas indicam os problemas mais difíceis).

1. Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:
   (a) O conjunto 1, 0, -1 é fechado em relação à adição.
   (b) O conjunto 1, 0, -1 é fechado em relação à multiplicação.
   (c) O conjunto 1, 0, -1 é fechado em relação à subtração.
   (d) O conjunto das potências positivas de 2, isto é, o conjunto $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ é fechado em relação à multiplicação.
   *(e) O conjunto das potências positivas de 2 é fechado em relação à adição.

2. Quantos são os divisores de 30?

3. Quantos são os divisores de 16?

4. Qual é o menor número natural que tem exatamente três divisores?

5. Ache todos os números primos entre 50 e 100.

*6. Demonstre que se 3 for um divisor de dois números, ele será um divisor da sua soma e da sua diferença. Generalize este fato e demonstre que se d for um divisor de dois números b_1 e b_2, então d será um divisor de $b_1 + b_2$ e de $b_1 - b_2$.

1.2 UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Os primos tornam-se cada vez mais raros, à medida que vamos considerando números naturais cada vez maiores. Para ilustrar este fato, ressaltamos que existem

168 números primos entre 1 e 1000
135 números primos entre 1000 e 2000
127 números primos entre 2000 e 3000
120 números primos entre 3000 e 4000
119 números primos entre 4000 e 5000

Mesmo assim a lista de primos é infinita; isto é, existem infinitos números primos. Este fato está demonstrado no Apêndice A, no fim do livro. A demonstração não requer nenhum conhecimento especial, de modo que o leitor poderá ler agora o Apêndice A, se assim o desejar. Colocamos esta demonstração no apêndice por não necessitarmos deste resultado para provar qualquer outra proposição neste livro. A demonstração é dada porque o resultado é interessante por si mesmo.

Todo número natural, exceto 1, ou é primo ou pode ser decomposto em fatores primos. Por exemplo, considere o número natural 94.860 que obviamente não é primo, pois

$$94.860 = 10 \times 9486.$$

Além do mais, 9486 é divisível por 2, por 3 e também por 9. Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} 94.860 &= 10 \times 2 \times 9 \times 527 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 527. \end{aligned}$$

Se 527 fosse primo, a expressão acima seria a decomposição de 94.860 em fatores primos. Mas 527 não é um número primo, porque $527 = 17 \times 31$. Assim, a decomposição em fatores primos será:

$$94.860 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \times 31.$$

Começamos com o número particular 94.860, mas o processo continuaria funcionando qualquer que fosse o número natural n de partida. Pois, ou n é primo, ou não é. Se não for, poderá ser decomposto em um produto de dois números menores, digamos a e b, tais que $n = ab$. Cada um dos números a e b, por sua vez, ou é um primo ou pode ser decomposto em um produto de números meno res. Continuando este processo, n ficará completamente decomposto em um produto de fatores primos.

A primeira sentença do parágrafo precedente distingue os primos dos outros números naturais. Em Matemática, é muitas vezes desejável fazer as definições tão gerais que se torne desnecessária uma divisão em vários casos. Por "decomposição em fatores primos", por exemplo, entendemos a representação de um número, digamos 12, como um produto de *vários* primos, no caso, $2 \times 2 \times 3$. Estendamos agora o significado de "decomposição em fatores primos" de modo a incluir o caso de um único primo. Por exemplo, a decomposição em fatores primos do número primo 23, teria um único fator 23. Com esta extensão do significado de "decomposição em fatores primos", nossa afirmação inicial pode ser substituída pela sentença: "Todo número natural, exceto 1, pode ser decomposto em fatores primos." Deste modo, abreviamos a sentença e eliminamos a necessidade de distinguir números primos de outros números, pelo menos no que diz respeito a uma afirmação sobre sua decomposição em fatores primos.

É um resultado básico em Matemática que a decomposição de um número natural em fatores primos *pode ser feita de um só modo*. Por exemplo, 94.860 não pode ser decomposto em fatores primos diferentes dos dados acima. É claro que a ordem dos fatores pode ser diferente; por exemplo:

$$94.860 = 3 \times 17 \times 2 \times 5 \times 31 \times 3 \times 2.$$

Mas, a não ser por tais mudanças de ordem, não há outra maneira de decompor 94.860 em fatores primos. Este resultado é conhecido como o *Teorema da Decomposição Única em Fatores Primos* ou *Teorema Fundamental da Aritmética*, que formalmente é assim enunciado:

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: *Todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores.*

A demonstração deste teorema está no Apêndice B e ele será usado à medida que formos avançando. A demonstração foi colocada em um apêndice por ser um pouco complicada, mas ela não faz uso de nenhuma idéia que já não tenha sido apresentada. Por isso, se o leitor assim o desejar, poderá ler agora o Apêndice B. Também poderá deixar a leitura para mais tarde e ver inicialmente os conceitos mais simples, deixando os mais difíceis para depois.

O enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética mostra por que não se inclui 1 entre os números primos. Pois se 1 fosse primo, poderíamos, por exemplo, escrever:

$$35 = 5 \times 7 = 1 \times 5 \times 7,$$

e assim, 35 (ou qualquer outro número natural) poderia ser decomposto em um produto de fatores primos de várias maneiras. É claro que o Teorema Fundamental continuaria válido, mas o seu enun ciado exigiria adendos como "exceto..." ou "a menos de...". Eliminando 1 do conjunto dos números primos, conseguimos dar ao Teorema um enunciado mais curto e elegante.

1.3 OS INTEIROS

Os números naturais 1, 2, 3, 4,... são fechados em relação à adição e à multiplicação, mas não são fechados em relação à subtração e divisão. Conseguiremos fechamento em relação à subtração em um conjunto mais amplo que, além dos naturais, inclua zero e os números negativos:

$$0, -1, -2, -3, -4, \ldots.$$

Estes, juntamente com os números naturais, formam os *inteiros:*

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

O leitor provavelmente já conhece as propriedades básicas

$$a + b = b + a \qquad ab = ba, \qquad a.0 = 0.a = 0,$$
$$(a+b) + c = a+(b+c), \qquad (ab)c = a(bc), \qquad (-a)(-b) = ab,$$
$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a.1 = 1.a = a,$$
$$a(b+c) = ab+ac.$$

onde a, b e c são inteiros quaisquer. Estas propriedades permanecem válidas para todos os sistemas de números tratados neste livro. Não é nossa intenção discutir as origens destas propriedades. Isto nos levaria ao estudo dos fundamentos do sistema de números e nos afastaria do nosso tópico central. Nosso objetivo é obter várias propriedades dos números, especialmente números irracionais, aceitando os fundamentos sem discussão.

Os inteiros são fechados em relação à adição, subtração e multiplicação. Não são fechados em relação à divisão pois, por exemplo, o resultado da divisão de 2 por 3 não é um número inteiro e o seu cálculo nos leva para fora da classe dos inteiros.

Antes de definirmos a divisão de inteiros, examinemos outras operações e seus resultados. Ao considerarmos a adição de inteiros, vemos não apenas que a soma de dois inteiros é ainda um inteiro, mas também que este é único. Por exemplo, a soma de 3 e -1 é 2 e não é 5 ou qualquer outro número. Expressamos este fato dizendo que, dados dois inteiros, existe *um único* inteiro, que é a sua soma. Analogamente para a multiplicação: dados dois inteiros, existe um único inteiro, que é o seu produto.

Ao discutirmos a divisão de números naturais vimos que, dados dois números naturais quaisquer b e d, *não* é sempre verdade que existe um terceiro número natural, o *quociente,* tal que $b = dq$. No entanto, se um tal número natural q existir ele é obviamente único e portanto, não nos damos ao trabalho de dizer que o número q deverá ser o único natural tal que $b = dq$. No entanto, ao definirmos a divisão no conjunto dos inteiros, precisaremos impor a unicidade do quociente. Vamos ver porquê.

Inicialmente concordemos ser desejável que as seguintes perguntas tenham resposta *única:* Quanto é $3-7$? Quanto é $(-2)\cdot(-3)$? Quanto é $8 \div 4$? Em outras palavras, vamos querer que nossas operações tenham resultado único. Vejamos o que acontece com a divisão no conjunto dos inteiros. Novamente, sejam b e d inteiros dados e definamos o quociente q como sendo um inteiro tal que $b=dq$. Por exemplo, sejam $b = -12$ e $d = 3$. Obviamente $q = -4$ pois $-12 = 3(-4)$. Existe neste caso, um q apropriado e ele é único. A seguir, seja b um inteiro qualquer e seja d o inteiro 0. Devemos achar um q satisfazendo $b = 0.q$. Se $b \neq 0$, esta equação não tem solução, isto é, não existe q que a satisfaça. Se $b = 0$, a equação fica: $0 = 0.q$ e esta é satisfeita por qualquer inteiro q. Em outras palavras, se existir uma solução de $b = 0.q$ ela *não* é única. Como resultados únicos de operações aritméticas são importantes, precisamos construir um sistema de números onde o quociente de dois inteiros não apenas exista, mas também seja único. O jeito é simplesmente não permitir divisão por zero. Podemos agora dizer que um número d é um *divisor* de um inteiro b se existir um único inteiro q tal que $b = d\bar{q}$ (daí, pela análise acima, $d \neq 0$). Ou, podemos dizer que um inteiro não nulo d é um divisor de b, se existir um inteiro q tal que $b = dq$ (o quociente será automaticamente único, pois eliminamos 0 como possível divisor).

Perguntamos, atrás, quantos divisores tem o número 35. Naquela ocasião, estávamos restritos aos números naturais e, portanto, a resposta foi *quatro*, a saber, 1, 5, 7 e 35. Se dermos uma nova interpretação à pergunta, permitindo agora que os divisores sejam inteiros, a resposta será *oito:* ± 1, ± 5, ± 7, e ± 35.

Problemas - Lista 2

1. -5 é um divisor de 35?
2. 5 é um divisor de 35?
3. -5 é um divisor de -35?
4. 3 é um divisor de -35?
5. 1 é um divisor de -35?
6. 1 é um divisor de 0?
7. 0 é um divisor de 1?
8. 1 é um divisor de 1?
9. 0 é um divisor de 0?
10. 1 é divisor de todos os inteiros?
11. 0 é um múltiplo de 35?
12. Mostre que existem vinte e cinco primos entre 1 e 100 e vinte e um primos entre 100 e 200.

1.4 INTEIROS PARES E ÍMPARES

Um inteiro se diz *par* se for divisível por 2; caso contrário, ele se diz *ímpar*. Os inteiros pares são

$$\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots.$$

e os ímpares,

$$\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots.$$

Como um inteiro par é divisível por 2, podemos sempre escrevê-lo na forma $2n$, onde o símbolo n representa qualquer inteiro. Quando um símbolo (como o n acima) pode representar qualquer elemento de um conjunto específico (o conjunto dos inteiros, no caso), diremos que o conjunto específico é o *domínio* dos valores daquele símbolo. No caso em consideração, dizemos que todo inteiro par pode ser escrito na forma $2n$ onde o domínio de n é o conjunto dos inteiros. Por exemplo, os inteiros pares 18, 34, 12 e -62 são da forma $2n$ para n igual a 9, 17, 6 e -31, respectivamente. Não há nenhuma razão especial para o uso da letra n. Ao invés de dizermos que inteiros pares são da forma $2n$, poderíamos ter dito que eles são inteiros da forma $2m$ ou $2j$ ou $2k$.

A soma de dois inteiros pares é um inteiro par. Os exemplos abaixo ilustram este fato:

12	30	46	-10
14	22	-14	-46
26	52	32	-56

Porém, *demonstrar* o princípio geral que *os inteiros pares são fechados em relação à adição*, requer mais do que uma coleção de exemplos. Para fazer a demonstração, usaremos a notação $2n$ para representar um inteiro par e, digamos, $2m$, para representar um outro inteiro par. Podemos então escrever:

$$2m + 2n = 2(m + n).$$

A soma $2m + 2n$ foi escrita na forma $2(m + n)$ para ressaltar sua divisibilidade por 2. *Não* seria suficiente escrever

$$2n + 2n = 4n,$$

pois isto representa a soma de um inteiro par com ele mesmo. Em outras palavras, teríamos provado que o dobro de um inteiro par é ainda par (divisível por 4, na realidade) ao invés de provarmos que a soma de dois inteiros pares quaisquer é um inteiro par. Daí usarmos a notação $2n$ para um inteiro par e $2m$ para o outro, indicando que eles não são necessariamente o mesmo.

Que notação podemos usar para representar inteiros ímpares? Observe que somando 1 a um inteiro par, obtemos sempre um inteiro ímpar. Daí podermos dizer que todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n + 1$. Esta não é a única forma. Poderíamos ter observado que subtraindo 1 de um inteiro par, obtemos um inteiro ímpar e dizer, então, que todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n-1$. De fato, podemos dizer que todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n + 3$ ou $2n - 3$ ou $2k - 5$, etc.

É verdade que todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n^2 + 1$? Se no lugar de n colocarmos os inteiros

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

obteremos o conjunto de inteiros:

$$\ldots, 51, 33, 19, 9, 3, 1, 3, 9, 19, 33, 51, \ldots$$

Cada um deles é ímpar mas nem *todos* os inteiros ímpares estão aí. Por exemplo, o ímpar 5 não é da forma $2n^2 + 1$. Portanto é falso que todo inteiro ímpar seja da forma $2n^2 + 1$, apesar de ser verdade que todo inteiro da forma $2n^2 + 1$ seja ímpar. Analogamente, é falso que todo inteiro par seja da forma $2k^2$, onde o domínio de k é o conjunto de todos os inteiros; por exemplo, 6 não é igual a $2k^2$ para nenhum inteiro k. Mas é verdade que qualquer inteiro da forma $2k^2$ é par.

A relação entre estas sentenças é comparável com a que existe entre "todos os gatos são animais" e "todos os animais são gatos". Obviamente a primeira é verdadeira e a segunda não. Esta relação vai ser discutida mais a fundo, quando examinarmos sentenças contendo as expressões "se", "somente se" e "se e somente se" (veja Sec. 2.3).

Problemas - Lista 3

Quais das sentenças abaixo são verdadeiras e quais são falsas? (está subentendido que o domínio dos valores de n, m, j ... é o conjunto de todos os inteiros).

1. Todo inteiro par pode ser escrito na forma

(a) $2j - 1$
(b) $2n + 7$
(c) $4n + 1$
(d) $2n^2 + 3$
(e) $2n^2 + 2n + 1$
(f) $2m - 9$

2. Todo inteiro da forma (a), do exercício anterior é ímpar; ídem para (b), (c), (d), (e) e (f).

3. Todo inteiro par pode ser escrito na forma

(a) $2n + 4$
(b) $4n + 2$
(c) $2m - 2$
(d) $2 - 2m$
(e) $n^2 + 2$

4. Todo inteiro da forma (a) do exercício anterior é par; ídem para (b), (c), (d) e (e).

1.5 PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

As duas proposições abaixo, serão usadas em um capítulo posterior:

(1) *O conjunto dos inteiros pares é fechado em relação à multiplicação.*

(2) *O conjunto dos inteiros ímpares é fechado em relação à multiplicação.*

Para demonstrar a proposição (1) devemos provar que o produto de dois inteiros pares quaisquer é par. Podemos representar dois inteiros pares pelos símbolos $2m$ e $2n$. Efetuando o produto, obtemos

$$(2m)(2n) = 4mn = 2(2mn).$$

O produto é divisível por 2 e, portanto, é par.

Para demonstrar a proposição (2) devemos provar que o produto de dois inteiros ímpares é ímpar. Representando os dois inteiros ímpares por $2n + 1$ e $2m + 1$ e efetuando o seu produto, obtemos

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 =$$
$$= 2(2mn + m + n) + 1$$

O número $2(2mn + m + n)$ é par, quaisquer que sejam os inteiros m e n. Portanto $2(2mn + m + n) + 1$ é ímpar.

As proposições (1) e (2) também poderiam ser demonstradas, usando o teorema da decomposição única em fatores primos, mas não daremos aqui pormenores desta outra demonstração. (Talvez o leitor queira tentar fazê-la sozinho. Será útil lembrar que um inteiro é par, se, e somente se, o número 2 aparecer na sua decomposição em fatores primos).

Até agora nós nos concentramos nos inteiros pares e ímpares, isto é, inteiros da forma $2m$ e $2m + 1$. Paridade de inteiros está relacionada com divisibilidade por 2. Por analogia, podemos considerar a classe dos inteiros divisíveis por 3:

$$\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$$

Estes são múltiplos de 3. Eles podem também ser descritos como a classe de inteiros da forma $3n$. Os inteiros da forma $3n+1$ são:

$$\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots,$$

e os inteiros da forma $3n + 2$ são

$$\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

Estas três listas de inteiros compreendem todos os inteiros; podemos, portanto, dizer que todo inteiro é exatamente de uma das formas $3n$, $3n + 1$ ou $3n + 2$.

1.6 UMA OBSERVAÇÃO SOBRE A NATUREZA DE UMA DEMONSTRAÇÃO

Há pouco dissemos que para demonstrar que os inteiros pares são fechados em relação à adição, isto é, a soma de dois inteiros pares é par, não basta examinar apenas alguns exemplos específicos como $12 + 14 = 26$. Dado que existem infinitos inteiros pares, não poderíamos examinar todos os casos específicos de soma de dois deles. Decorre daí a necessidade de recorrer-se a algum tipo de simbolismo algébrico; por exemplo, o símbolo $2n$ que pode ser usado para representar qualquer inteiro par, permitiu-nos demonstrar o fechamento do conjunto dos inteiros pares em relação à multiplicação.

No entanto, para demonstrar uma proposição *negativa* como, por exemplo, "Os inteiros ímpares *não* são fechados em relação à adição", não é necessário usar um símbolo algébrico do tipo $2m + 1$. Isto porque uma negação pode ser demonstrada através de um único exemplo. Para demonstrar que nem todos os elementos de um conjunto têm uma certa propriedade, basta achar um único elemento do conjunto que não a possua. Para demonstrar que nem todos os meninos têm olhos castanhos, basta encontrar um menino de olhos azuis ou verdes. Para demonstrar que nem sempre a soma de dois inteiros ímpares é ímpar, basta observar que $3 + 5 = 8$ e este caso específico da soma de dois inteiros ímpares ser par é uma demonstração. No entanto, se quisermos demonstrar que a soma de dois inteiros ímpares *quaisquer* é sempre um inteiro par, não será suficiente escrever $3 + 5 = 8$. Mesmo se escrevêssemos muitas somas: $17 + 1 = 18$, $5 + 53 = 58$, etc., ainda não teríamos uma demonstração correta da proposição.

Outro exemplo de uma proposição negativa: "Nem todo número primo é ímpar". Para demonstrá-la, basta citar que o número par 2 é primo.

Problemas - Lista 4

(Os três primeiros problemas envolvem proposições negativas e por isso podem ser resolvidos, dando um único exemplo numérico).

1. Demonstre que os inteiros ímpares não são fechados em relação à subtração.

2. Demonstre que os inteiros da forma $3n + 1$ não são fechados em relação à adição.

3. Demonstre que os inteiros da forma $3n + 2$ não são fechados em relação à multiplicação.

4. Demonstre que a soma de dois inteiros ímpares é sempre um inteiro par.

5. Demonstre que os seguintes conjuntos são fechados em relação à operação indicada:

   (a) os inteiros da forma $3n + 1$, em relação à multiplicação;
   (b) os inteiros da forma $3n$, em relação à adição;
   (c) os inteiros da forma $3n$, em relação à multiplicação.

6. Decida quais dos seguintes conjuntos são fechados em relação à operação indicada e demonstre cada uma de suas respostas:

   (a) os inteiros da forma $6n + 3$, em relação à adição;
   (b) os inteiros da forma $6n + 3$, em relação à multiplicação;
   (c) os inteiros da forma $6n$, em relação à adição;
   (d) os inteiros da forma $6n + 1$, em relação à subtração;
   (e) os inteiros da forma $6n + 1$, em relação à multiplicação;
   (f) os inteiros da forma $3n$, em relação à multiplicação;
   (g) os inteiros que não são da forma $3n$, em relação à multiplicação.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS RACIONAIS

2.1 DEFINIÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Vimos que os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, ... são fechados em relação à adição e à multiplicação, e que os inteiros

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

são fechados em relação à adição, multiplicação e subtração. No entanto, nenhum destes conjuntos é fechado em relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como 4/3, 7/6, -2/5, etc. O conjunto de todas as frações como estas é o conjunto dos números racionais. Mais precisamente, *um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero.* Vamos fazer várias observações a respeito desta definição:

(1) Exigimos que d seja diferente de zero. Em notação matemática: $d \neq 0$. Esta exigência é necessária, pois d é de fato, um divisor.

Considere os exemplos:

Caso (a): $a = 21$, $d = 7$, $\frac{a}{d} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1} = 3$;

Caso (b): $a = 25$, $d = 7$, $\frac{a}{d} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$.

No caso (a), d é um divisor no sentido do capítulo anterior, isto é, 7 é um divisor exato de 21. No caso (b), d é ainda um divisor, mas em um sentido diferente, porque 7 não é divisor *exato* de 25. Se chamarmos 25 de *dividendo* e 7 de *divisor,* obteremos um *quociente* 3 e um *resto* 4. Estaremos, assim, usando a palavra *divisor* em um sentido mais amplo do que no Capítulo 1, cobrindo uma maior variedade de casos. Assim mesmo, o conceito de divisor, como apresentado no Capítulo 1, continua se aplicando a situações como a do caso (a) acima e, como no Capítulo 1, devemos excluir $d = 0$.

(2) Observe que, enquanto os termos *número racional* e *fração ordinária* são, às vezes, usados como sinônimos, a palavra *fração,* sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, como, por exemplo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{17}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$$

(3) A definição de número racional contém as palavras "um número que *pode ser colocado* na forma a/d, onde a e d são inteiros e $d \neq 0$". Por que não dizemos simplesmente "um número da forma a/d, onde a e d são inteiros e $d \neq 0$"? O motivo é o seguinte: existem infinitos modos de descrever um dado número racional (por exemplo, 2/3 pode ser escrito como 4/6, 6/9, ... ou $2\pi/3\pi$, ou $2\sqrt{3}/3\sqrt{3}$, ou -10/-15, mencionando apenas alguns) e não vamos querer que nossa definição de número racional dependa da ma

neira particular escolhida para representá-lo. Uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número; assim, só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa, ou não, um número racional. Considere, por exemplo, os números

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \quad e \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}},$$

nenhum dos quais está na forma a/d, com a e d inteiros. Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas com a primeira expressão e obter

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4.3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1}.$$

Chegamos, assim, a um número representado por uma fração na forma especificada: $a = 2$ e $d = 1$ e, portanto, $\sqrt{12}/\sqrt{3}$ é um número racional. Ele não teria se qualificado como número racional, se a definição exigisse estar o número na forma certa desde o início. No caso do $\sqrt{15}/\sqrt{3}$, as transformações

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

dão o número $\sqrt{5}$. Nos capítulos seguintes vamos mostrar que $\sqrt{5}$ não pode ser escrito como razão de dois inteiros e, portanto, é um número irracional.

(4) Observe que todo número inteiro é um número racional. Acabamos de constatar este fato no caso do inteiro 2. Em geral, os inteiros podem ser escritos na forma

$$\ldots, \frac{-5}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots,$$

onde, a cada um, é dado o denominador 1.

Problemas - Lista 5

1. Demonstre que o inteiro 2 pode ser escrito na forma a/d, com a e d inteiros, de infinitos modos.

2. Demonstre que o número racional 1/3 pode ser escrito na forma a/d, com a e d inteiros, de infinitos modos.

3. Demonstre que o inteiro 0 pode ser escrito na forma a/d, com a e d inteiros, de infinitos modos.

4. Demonstre que todo número racional pode ser escrito na forma a/d, a e d inteiros, de infinitos modos.

5. *Definição*. Seja k um número qualquer; o *inverso* de k é um outro número, digamos ℓ, tal que $k \cdot \ell = 1$.
   Uma conseqüência desta definição é que todos os números, exceto 0, têm inversos. Dado $k \neq 0$, por definição o seu inverso satisfaz a equação $k \cdot \ell = 1$. Portanto,

$$\ell = \frac{1}{k},$$

que somente tem sentido para $k \neq 0$. Demonstre que o inverso de qualquer número racional (exceto zero) é um número racional.

2.2 REPRESENTAÇÕES DECIMAIS FINITAS E INFINITAS

Existe uma outra representação do número racional 1/2 que é diferente das formas 2/4, 3/6, 4/8, etc., a saber, a representação decimal: 0,5. As representações decimais de alguns números racionais são finitas, terminam. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{2}{5} = 0{,}4; \quad \frac{1}{80} = 0{,}0125.$$

Outros números racionais têm uma representação decimal infinita, que não termina. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots; \ \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots; \ \frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots \ ^{*}$$

* N.T. Usaremos, ocasionalmente, as expressões: "fração decimal finita" para designar a representação decimal finita e "fração decimal infinita" para designar a representação decimal infinita. Assim, 0,5; 0,8625 serão frações decimais finitas e 0,333...; 0,454545... serão frações decimais infinitas.

Estas representações decimais infinitas podem ser obtidas a partir das frações, dividindo-se o numerador pelo denominador. No caso do 5/11, por exemplo, dividimos 5,000... por 11 e obtemos o resultado 0,454545....

Quais são os números racionais que têm uma representação decimal finita? Antes de dar uma resposta geral, examinemos um exemplo:

Sabemos que

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10000},$$

e que qualquer fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a 10, 100 ou alguma potência de 10. Simplificando a fração à direita, até torná-la irredutível*, obtemos:

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10000} = \frac{69}{80}.$$

Obteve-se o denominador 80, dividindo 10000 por 125, onde 125 é o maior divisor comum de 10000 e 8625. O inteiro 80, bem como 10000, têm somente dois fatores primos, 2 e 5. Se tivéssemos começado com qualquer fração decimal finita, ao invés de 0,8625, a fração irredutível a/b, correspondente, teria a mesma propriedade. Isto é, os fatores primos do denominador b poderiam

* Uma fração a/b se diz irredutível se o maior divisor comum de a e b for 1, ou seja, se a e b forem primos entre si.

ser 2 ou 5, mas nenhum outro, pois b é sempre fator de alguma potência de 10 e 10 = 2.5. Este é o ponto crucial e passaremos a demonstrar a proposição geral:

Um número racional, na forma irredutível a/b, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

Deve ficar claro que b não precisa, necessariamente, ter os fatores primos 2 e 5; pode ser que tenha apenas um deles como fator primo, ou nenhum. Assim:

$$\frac{1}{25} = 0{,}04; \quad \frac{1}{16} = 0{,}0625; \quad \frac{7}{1} = 7{,}0;$$

onde os valores de b são 25, 16 e 1. O importante é que b não tenha *nenhum outro* fator primo além de 2 e 5.

Observe que a proposição acima contém as palavras *se e somente se*. Até agora, provamos a parte do *somente se*, pois mostramos que a/b tem uma representação decimal finita somente se b não tiver fatores primos diferentes de 2 e de 5. (Em outras palavras, se b for divisível por algum primo diferente de 2 e de 5, então o número racional a/b, a e b primos entre si, não terá uma representação decimal finita.)

A parte *se* da proposição afirma: se o inteiro b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, então o número racional a/b, a e b primos entre si, terá uma representação decimal finita. Para demonstrar a parte *se*, devemos começar com uma fração irredutível qualquer, a/b, supor que b tenha, no máximo, os fatores primos 2 e 5, e demonstrar que a fração decimal correspondente é do tipo finito. Consideremos, inicialmente, um exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{9741}{3200} = \frac{9741}{2^7.5^2}$$

Para obtermos a representação decimal deste número, basta transformarmos a fração a/b em outra, que tenha por denominador uma potência de 10. Isto pode ser feito, multiplicando o numerador e o denominador por 5^5:

$$\frac{9741}{2^7.5^2} = \frac{9741.5^5}{2^7.5^7} = \frac{30440625}{10^7} = 3{,}0440625.$$

Podemos passar deste exemplo para o caso geral, da seguinte maneira. Suponhamos que b seja da forma $2^m.5^n$, com m e n inteiros positivos ou nulos. Então, de duas uma: ou n é menor do que ou igual a m $(n \leq m)$, ou então, n é maior do que m $(n > m)$. Se $n \leq m$, multiplicaremos o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}.$$

Sendo $m-n$ positivo ou nulo, 5^{m-n} será um inteiro e, portanto, $a.5^{m-n}$ também será um inteiro, digamos c. Podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m},$$

e, como a divisão do inteiro c por 10^m requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obteremos para a/b uma representação decimal finita.

Por outro lado, se $n > m$, multiplicaríamos o numerador e o denominador de a/b por 2^{n-m}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{2^m.5^n.2^{n-m}} = \frac{a.2^{n-m}}{2^n.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{10^n}.$$

Escrevendo d no lugar de $a.2^{n-m}$, obteremos

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n},$$

e assim, novamente teremos, para a/b, uma representação decimal finita.

Problemas - Lista 6

1. Escreva, em notação decimal finita, as seguintes frações

(a) $\frac{1}{4}$, (b) $\frac{3}{200}$, (c) $\frac{321}{400}$, (d) $\frac{7}{625}$, (e) $\frac{352}{125}$, (f) $\frac{3149}{2500}$.

2.3 AS DIVERSAS MANEIRAS DE ENUNCIAR E DEMONSTRAR PROPOSIÇÕES

Estivemos usando a frase "*se, e somente se*", sem lhe ter dado uma definição precisa.

Por isso, neste ponto, faremos uma pausa em nossa exposição sobre números racionais, para esclarecer um pouco a linguagem usada na formulação de sentenças matemáticas e, também, a relação desta linguagem com a lógica subjacente. Existem, em Matemática, dois tipos básicos de afirmações ou proposições:

Se A, então B.

Se A, então B e reciprocamente.

Vamos examinar cada uma delas.

Quando, como na Secção 1.5, dizemos "se m e n forem inteiros pares, então mn será par", temos uma proposição do tipo "se A, então B". Esta proposição pode ser formulada de muitas maneiras, como se vê na seguinte lista:

Maneiras de Formular "Se A, então B"

(1) Se A for verdadeiro, então B será verdadeiro.
(2) Se A for válido, então B será válido.
(3) A implica B.
(4) B é implicado por A.
(5) B segue de A.
(6) A é uma condição suficiente para B.
(7) B é uma condição necessária para A.
(8) B é verdadeiro desde que A seja verdadeiro.
(9) B é verdadeiro se A for verdadeiro.

(10) A será verdadeiro somente se B for verdadeiro.

(11) É impossível, ao mesmo tempo, termos A verdadeiro e B falso.

(12) Se B for falso, então A será falso.

Esta lista contém somente as formas mais usuais e não é completa, pois, na verdade, não há limites para as possíveis formulações da proposição. Algumas formulações, como (6) e (7), por exemplo, nem serão usadas neste livro. Todas, salvo (12), podem ser consideradas como definições dos termos "implica", "condição necessária", "condição suficiente" e "somente se".

Consideremos (10), por exemplo, que define o uso técnico, em Matemática, do termo "somente se". Substituindo os símbolos A e B pelas afirmações a respeito de m e n, feitas anteriormente, podemos concluir que as duas proposições abaixo, transmitem, ambas, a mesma informação.

"Se os inteiros m e n forem pares, então o inteiro mn será par".

"Os inteiros m e n serão pares somente se o inteiro mn for par".

O leitor, acostumado com o uso, dia a dia, da palavra "somente", pode não sentir que as proposições acima transmitam a mesma informação. Neste caso, deverá se conscientizar da distinção entre a linguagem técnica da Matemática e o uso diário do Português. Apesar de estas linguagens terem muito em comum, existem diferenças acentuadas, como no exemplo em questão. (Uma pessoa, hábil no uso matemático da linguagem, poderá optar por ela como sua linguagem do dia-a-dia. Correrá, porém, o risco de parecer pedante, afetada ou emproada aos olhos do cidadão comum.)

O que foi dito até agora sobre as formulações de "se A, então B" é que as formas (1) até (11) são baseadas apenas em convenções quanto ao uso da linguagem em Matemática. A forma (12) é diferente, pois envolve um axioma fundamental da Lógica. O fato de (12) transmitir a mesma informação do que "se A, então B" se baseia na lógica e não, simplesmente, em um arranjo diferente de palavras. O axioma da Lógica (conhecido como *princípio do terceiro excluído*) afirma que, ou A é verdadeiro, ou A é falso, onde A é qualquer proposição passível de análise. Em essência, o axioma exclui qualquer estado intermediário entre a veracidade e a falsidade de A. Aceitemos este axioma e provemos que as formas (1) e (12) transmitem a mesma informação.

Para isto devemos provar que (1) implica (12) e, reciprocamente, que (12) implica (1). Inicialmente, suponhamos (1) e examinemos (12):

"Se B for falso, então A será falso".

Seria possível que esta conclusão fosse falsa, devendo ser "A será verdadeiro"? Se este fosse o caso, então, usando (1) poderíamos concluir que B seria verdadeiro, mas isto contradiz a hipótese de (12). Portanto, a conclusão "A será falso" é correta.

Reciprocamente, suponhamos (12) e provemos (1):

"Se A for verdadeiro, então B será verdadeiro".

Perguntamos se esta conclusão pode estar errada; será que deveria ser "B será falso"? Se assim fosse, usando (12), concluiríamos que A seria falso, mas isto contradiz a hipótese de (1). Portanto, "B será verdadeiro" é a conclusão correta.

As formas (11) e (12) mostram a natureza da demonstração indireta. Suponhamos querer demonstrar a proposição "se A, então B". Uma demonstração direta é aquela em que supomos A, ou aceitamos A, e deduzimos B. Mas, examinando (11), vemos que é possível fazer uma demonstração, supondo a veracidade de A e a falsidade de B e deduzir, então, uma contradição. Esta seria uma demonstração por contradição, uma das formas de demonstração indireta. Pode-se detectar este tipo de demonstração observando as hipóteses formuladas; em geral requer-se, de início, que a proposição a ser provada seja suposta falsa. Demonstrações indiretas também podem ser detectadas pela linguagem usada no fim da demonstração, como "... e assim chegamos a uma contradição e o teorema está provado".

Uma outra forma de demonstração indireta é sugerida por (12). Para provar "se A, então B", podemos supor que B seja falso e deduzir, então, que A será falso. As três formas de demonstração, que acabamos de identificar, são:

Suponha A, deduza B (demonstração direta)

Suponha A verdadeiro e B falso, deduza uma contradição (uma forma de demonstração indireta).

Suponha B falso, deduza que A será falso (outra forma de demonstração indireta).

Um fato curioso, quanto à maneira de como livros de Matemática são escritos (este, inclusive), é que as três formas de demonstração são usadas livremente, muitas vezes sem nenhuma indicação clara quanto à forma de demonstração que está sendo usada em dado momento. Espera-se, de fato, que o leitor decifre uma pequena charada, identificando, para acompanhar o raciocínio, a forma de demonstração que está sendo usada. Em geral, isto não oferece dificuldade e o leitor consegue detectar quais foram as hipóteses feitas pelo autor no início da demonstração.

Consideremos, a seguir, o segundo tipo de proposição matemática:

"Se A, então B e reciprocamente",

mencionado no começo desta secção. As palavras *e reciprocamente* significam "se B, então A" e este é o *recíproco* de "se A, então B". Provavelmente o leitor está ciente de que uma afirmação e sua recíproca são duas coisas diferentes. Uma pode ser verdadeira e a outra, falsa; ambas podem ser verdadeiras ou ambas podem ser falsas, dependendo das circunstâncias. Por exemplo, a afirma ção: "se m e n forem pares, então mn será par" é verdadeira, enquanto a sua recíproca, "se mn for par, então m e n serão pares", é falsa.

Analogamente ao que fizemos com a lista anterior, indicaremos as várias maneiras de formular "se A, então B e reciprocamente":

Se B, então A e reciprocamente.
A é verdadeiro se, e somente se, B for verdadeiro.
B é verdadeiro se, e somente se, A for verdadeiro.
A é falso se, e somente se, B for falso.
B é falso se, e somente se, A for falso.
A implica B e reciprocamente.
B implica A e reciprocamente.
A é uma condição necessária e suficiente para B.
B é uma condição necessária e suficiente para A.
A e B são proposições equivalentes.

Todas estas afirmações têm o mesmo significado.

Observemos a grande variedade de formas de demonstração da proposição "se A, então B e reciprocamente". Como vimos anteriormente, existem, basicamente, três formas de demonstração para proposições do tipo "se A, então B". Analogamente, para a demonstração de "se B, então A". Sendo possível combinar qualquer uma das três formas usadas na primeira parte da demonstração com qualquer uma das formas usadas na segunda parte, existem nove possíveis caminhos para demonstrar "se A, então B e reciprocamente". Talvez o mais comum seja o da demonstração direta em ambas as direções, isto é,

(1) Suponha A, deduza B.
(2) Suponha B, deduza A.

Um outro caminho, muito usado, é

(1) Suponha A, deduza B.
(2) Suponha A falso, deduza que B será falso.

Em demonstrações mais complexas estes caminhos são, muitas vezes, combinados. Uma demonstração de "se A, então F" pode ser feita através de uma cadeia de proposições: "se A, então B", "se B, então C", "se C, então D", "se D, então E", "se E, então F". Neste caso, cada proposição implica a seguinte. Se cada proposição e sua recíproca puderem ser demonstradas por um dos caminhos descritos, então também teremos: "se F, então E", "se E, então D", "se D, então C", "se C, então B", "se B, então A", de modo que a recíproca, "se F, então A", da proposição original, será também verdadeira. Quando um autor diz: "a recíproca pode ser demonstrada, invertendo as passagens feitas", é isto que ele tem em mente.

Todas estas formas de demonstrações podem ser encontradas em livros de Matemática e, como já dissemos, o autor muitas vezes se embrenha na demonstração de um teorema sem declarar ex plicitamente que forma estará usando. O autor espera que o leitor descubra por si só a natureza da técnica de demonstração que está sendo apresentada.

Problemas - Lista 7

1. Demonstre que a afirmação: "se mn for par, então m e n serão pares" é falsa.

2. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional a/b, a e b primos entre si, tem uma representação finita
   (a) se, e somente se, b não for divisível por outro primo além de 2;
   (b) se b não for divisível por outro primo além de 2;
   (c) somente se b não for divisível por outro primo além de 2;
   (d) se, e somente se, b não for divisível por 3;
   (e) se b não for divisível por 3;
   (f) somente se b não for divisível por 3.

3. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas? O número racional a/b tem uma representação decimal finita
   (a) se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;
   (b) se b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5;

   (c) somente se b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

   Sugestão: observe que não foi especificado estar a/b na forma irredutível.

4. Um livro recente de Álgebra* usa a seguinte proposição como axioma: "$ab = 0$ somente se $a = 0$ ou $b = 0$". Reescreva a proposição na forma "se A, então B".

5. (a) Demonstre: "se β (beta) for um número racional, então β^2 também será racional".
   (b) Isto equivale a demonstrar "se β^2 for irracional, então β também será irracional"?

2.4 DÍZIMAS PERIÓDICAS

Voltemos ao tópico dos números racionais. Separamos os números racionais em dois tipos, a saber, os que têm uma representação decimal finita e os que têm uma representação decimal infinita. Podemos agora demonstrar que tais representações decimais infinitas possuem um grupo de algarismos que se repete indefinidamente como, por exemplo

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ \ldots \qquad \text{e} \qquad \frac{3097}{9900} = 0{,}31282828\ \ldots .$$

---

* W.W. Sawyer, A Concrete Approach to Abstract Algebra, p. 30.

Por conveniência, usaremos a notação habitual para indicar uma dízima periódica, isto é, usaremos uma barra sobre a parte que se repete:

$$\frac{5}{11} = 0,\overline{45}; \quad \frac{3097}{9900} = 0,31\overline{28}; \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}; \quad \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}; \text{ etc.}$$

Pode-se ver o porquê da repetição dos algarismos, considerando, por exemplo, a conversão usual da fração ordinária 2/7 em fração decimal:

```
2,000000 |_7_______
14        0,285714
 60
 56
  40
  35
   50
   49
    10
     7
     30
     28
      2
```

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$$

No decorrer da divisão, os restos são, sucessivamente, 6, 4, 5, 1, 3, 2. Ao se chegar no resto 2, completa-se um ciclo e reaparece a divisão de 20 por 7. Os restos são todos menores do que o divisor 7 e, portanto, haverá, necessariamente, uma repetição, dado que existem apenas seis restos possíveis. (O resto 0 está fora de cogitação, pois não estamos examinando números com representações decimais finitas.)

No exemplo acima, a repetição se deu quando a divisão de 20 por 7 apareceu pela segunda vez. A divisão de 20 por 7 foi

o primeiro passo na divisão toda. Não é, necessariamente, o primeiro passo que se repete. Consideremos, por exemplo, a conversão de 209/700 em uma fração decimal:

```
209,00000000 |_700______
1400          0,29857142
  6900
  6300
   6000
   5600
    4000
    3500
     5000
     4900
      1000
       700
      3000
      2800
       2000
       1400
        600
```

$$\frac{209}{700} = 0,29\overline{857142}$$

A repetição ocorre com o aparecimento, pela segunda vez, do resto 600. O divisor sendo 700, sabemos que os possíveis restos são os números 1, 2, 3, ..., 699. Portanto, podemos estar certos de que algum resto aparecerá uma segunda vez, ainda que precisemos, talvez, efetuar muitas divisões antes que isto ocorra.

Argumentamos, analogamente, no caso geral a/b. Pois, se o inteiro a for dividido pelo inteiro b, os únicos restos possíveis serão: 1, 2, 3, ..., $b-2$, $b-1$ e, portanto, podemos ter certeza de que haverá repetição no desenrolar da divisão. Quando a repetição ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma dízima periódica.

Provamos, até agora, a metade da seguinte proposição:

Todo número racional a/b pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica; reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica infinita, representa um número racional.

A recíproca trata de dois tipos de frações decimais: as finitas e as infinitas periódicas. As frações decimais finitas já foram estudadas e vimos que elas representam números racionais. Examinemos as dízimas periódicas. Mostraremos, inicialmente, por um processo passível de generalização, que dízimas periódicas representam números racionais. Após estudarmos um caso particular, aplicaremos o mesmo processo para uma dízima periódica qualquer.

Consideremos a dízima periódica

$$x = 28{,}123\overline{456} \quad \text{ou} \quad x = 28{,}123456456\ldots.$$

Vamos multiplicá-la, inicialmente, por um número e, depois, por um outro; estes números vão ser escolhidos de tal modo que ao subtrairmos os dois produtos obtidos, as partes periódicas infinitas vão desaparecer. No exemplo, os números 10^6 e 10^3 atendem este propósito, pois

$$10^6 \cdot x = 28123456{,}\overline{456}$$

e

$$10^3 \cdot x = 28123{,}\overline{456},$$

de modo que a diferença $10^6 \cdot x - 10^3 \cdot x$ é

$$999000x = 28095333.$$

Portanto

$$x = \frac{28095333}{999000},$$

o que mostra ser x um número racional.

Generalizando este processo, vamos mostrar que os números 10^3 e 10^6 não "caíram do céu" mas foram escolhidos criteriosamente. Omitiremos a parte inteira da fração decimal (isto é, a parte correspondente ao 28 do exemplo anterior) porque ela não desempenha nenhum papel no processo. Podemos, então, escrever qualquer dízima periódica (sem parte inteira) na forma*

$$x = a_1 a_2 \ldots a_s \overline{b_1 b_2 \ldots b_t},$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_s$ representam os s algarismos consecutivos da parte não periódica e b_1, $b_2, \ldots, b_t$ representam os t algarismos do período (período é a parte que se repete). (No exemplo acima, $s = 3$, $t = 3$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = 4$, $b_2 = 5$ e $b_3 = 6$.)

* Observe que a notação $a_1 a_2 \ldots a_s b_1 b_2 \ldots b_t$, usada aqui, *não* é a notação algébrica usual e *não* representa o produto dos números $a_1, a_2, \ldots, b_t$; nesta demonstração ela representa o inteiro cujos algarismos são $a_1, a_2, \ldots, b_t$. Além do mais, os símbolos 1, 2, ..., s na notação $a_1, a_2, \ldots, a_s$ são chamados "índices" e não têm outro significado salvo o de etiquetas de identificação; sem índices, esgotaríamos logo as letras disponíveis.

Se multiplicarmos x, inicialmente por 10^{s+t}, depois por 10^s, e subtrairmos os resultados, obteremos

$$10^{s+t}\cdot x = a_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t+0,b_1b_2\ldots b_t,$$

$$10^s\cdot x = a_1a_2\ldots a_s+0,b_1b_2\ldots b_t;$$

e

$$(10^{s+t}-10^s)\cdot x = a_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t - a_1a_2\ldots a_s,$$

de modo que

$$x = \frac{a_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t-a_1a_2\ldots a_s}{10^{s+t} - 10^s},$$

que está na forma "inteiro sobre inteiro". Portanto x é racional, como queríamos demonstrar.

Problemas - Lista 8

1. Escreva os seguintes números na forma a/b:

(a) 0,111... (b) 5,6666... (c) $0,37\overline{43}$

(d) $0,9\overline{987}$ (e) $0,00\overline{01}$ (f) $0,\overline{9}$

2.5 TODA FRAÇÃO DECIMAL FINITA PODE SER ESCRITA NA FORMA DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA

Ficou já estabelecido, neste capítulo, que alguns números racionais têm representação decimal finita, enquanto que outros têm representação decimal infinita. É um fato curioso que todo número racional representado por uma fração decimal finita (exceto zero) também possua uma representação decimal infinita. Claro que isto pode ser feito de uma maneira muito óbvia, ao escrevermos 6,8 como 6,8000..., com uma infinidade de zeros. Mas, além deste processo óbvio de transformar uma fração decimal finita em uma infinita, acrescentando uma fila de zeros, existe uma outra maneira um pouco surpreendente. Comecemos com a bem conhecida expansão decimal de 1/3:

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots.$$

Se multiplicarmos ambos os membros desta igualdade por 3, obteremos um resultado de aparência estranha:

(1) $$1 = 0,99999\ldots.$$

Temos uma igualdade entre números, um com representação decimal finita: 1 ou 1,0; e outro, com representação decimal infinita: 0,99999...

Encaremos a igualdade (1) de outra maneira. Representemos a dízima 0,99999... por x, isto é:

(2) $$x = 0,99999\ldots$$

Multiplicando por 10, obtemos

$$10x = 9,99999\ldots = 9 + 0,99999\ldots.$$

Subtraindo a eq. (2) desta, vem:

$$9x = 9 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Demonstramos, assim, a igualdade (1) por um outro caminho.

Dividindo-se, agora, a eq. (1) por 10, 100, 1000, 10.000, etc., obtem-se uma série de resultados:

$$(3)\qquad \begin{aligned} 0{,}1 &= 0{,}099999\ldots \\ 0{,}01 &= 0{,}0099999\ldots \\ 0{,}001 &= 0{,}00099999\ldots \\ 0{,}0001 &= 0{,}00009999\ldots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Estes resultados podem ser usados para transformar qualquer fração decimal finita em uma infinita. Por exemplo, podemos escrever

$$6{,}8 = 6{,}7 + 0{,}1 = 6{,}7 + 0{,}099999\ldots = 6{,}799999\ldots$$

Outros exemplos:

$$\begin{aligned} 0{,}43 &= 0{,}42 + 0{,}01 = 0{,}42 + 0{,}0099999\ldots = 0{,}4299999\ldots; \\ 0{,}758 &= 0{,}757 + 0{,}001 = 0{,}757 + 0{,}00099999\ldots = 0{,}75799999\ldots; \\ 0{,}102 &= 0{,}101 + 0{,}001 = 0{,}101 + 0{,}00099999\ldots = 0{,}10199999\ldots; \\ 6{,}81 &= 6{,}8 + 0{,}01 = 6{,}8 + 0{,}0099999\ldots = 6{,}8099999\ldots. \end{aligned}$$

Este esquema nos permite transformar qualquer fração decimal finita em uma dízima. Reciprocamente, as igualdades (1) e (3) podem ser usadas para transformar qualquer dízima, com uma infinita sucessão de noves, em uma fração decimal finita:

$$\begin{aligned} 0{,}4699999\ldots &= 0{,}46 + 0{,}0099999\ldots = 0{,}46 + 0{,}01 = 0{,}47; \\ 18{,}099999\ldots &= 18 + 0{,}099999\ldots = 18 + 0{,}1 = 18{,}1. \end{aligned}$$

Decidir quantas representações decimais existem para um dado número, é uma questão de interpretação. Pois, além de escrevermos 0,43 como 0,42999..., podemos também escrever este número nas formas

$$0{,}430; \quad 0{,}4300; \quad 0{,}43000; \quad 0{,}430000; \quad \ldots$$

Estas, no entanto, são variações tão triviais de 0,43, que não as contamos como representações distintas. Quando falamos da representação decimal infinita de um número, como 0,43, queremos sempre dizer 0,42999... e não, 0,43000... .

Problemas - Lista 9

1. Represente cada um dos seguintes números por uma fração decimal finita:

   (a) 0,11999... (b) 0,299999... (c) 4,79999... (d) 9,999...

2. Represente cada um dos seguintes números por uma fração decimal infinita:

   (a) 0,73 (b) 0,0099 (c) 13

3. Quais números racionais a/b têm duas representações decimais essencialmente distintas?

4. Quais números racionais a/b têm três representações decimais essencialmente distintas?

2.6 UM RESUMO

Distinguimos dois tipos de números racionais a/b: aqueles para os quais o inteiro b não tem nenhum fator primo além de 2 e 5 e todos os demais. (Supõe-se a/b irredutível.) Os números racionais do primeiro tipo têm representações decimais finitas e infinitas; por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,4999999\ldots\ .$$

Os números do segundo tipo têm apenas uma representação decimal infinita; por exemplo,

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots\ .$$

Estas representações são as únicas possíveis, no seguinte sentido: 1/2 e 1/3 não têm outra representação decimal, salvo, é claro, trivialidades como 0,500. Explicaremos no próximo capítulo porque isto acontece.

A ênfase foi dada aos números racionais e suas representações decimais. Reflitamos um momento somente sobre as frações decimais. Todas as frações decimais infinitas, neste capítulo, foram periódicas. O que acontece com frações decimais infinitas não periódicas como

$$q = 0,101\ 001\ 000\ 100\ 001\ 000\ 001\ 000\ 000\ 1\ \ldots$$

formada por uma série de uns, separados por zeros, inicialmente um zero, depois dois zeros, depois três zeros, e assim por diante? Que tipo de número, se é que se trata de um número, é q? Pelo que estudamos neste capítulo, sabemos que q não é um número racional. No próximo capítulo ampliaremos nosso estudo para incluir números como q.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS REAIS

3.1 O PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO

Quando introduzimos coordenadas em Geometria, escolhemos uma reta para ser o eixo dos x e este eixo é graduado de modo que haja uma correspondência entre pontos e números. Isto é feito escolhendo-se dois pontos arbitrários (porém distintos) como as posições do 0 e do 1, e a distância entre estes dois pontos como *unidade de comprimento* ou *unidade*. Convenciona-se escolher o ponto-1 direita do ponto-0 (Fig. 5), de modo que,

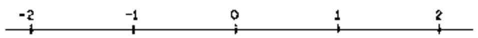


Figura 5

pontos à esquerda do ponto-0 fiquem associados a números negativos. O ponto-0 chamado *origem*. O ponto correspondente a 7, por exemplo, fica à direita da origem e a 7 unidades desta. O ponto correspondente a -7 fica à esquerda da origem, também a 7 unidades desta. Assim, a cada ponto fica associado um número, distância do ponto à origem, juntamente com um sinal mais, se o ponto estiver à direita da origem e um sinal menos, se estiver à esquerda. Como se vê na Fig. 6, números racionais como -4/3, 1/2 2,3 são facilmente localizados, dada sua relação com a unidade de comprimento.

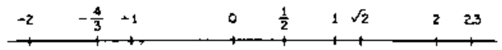


Figura 6

O símbolo $\sqrt{2}$ designa um número que, multiplicado por si mesmo, dá 2, isto é, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Para ver o significado geométrico de $\sqrt{2}$ consideremos um quadrado unitário como o da Fig. 7. O Teorema de Pitágoras nos diz que o quadrado do comprimento de sua diagonal é 2. Portanto, representamos o comprimento da diagonal por $\sqrt{2}$ e associamos o número $\sqrt{2}$ ao ponto da reta cuja distância à origem é igual ao comprimento da diagonal do nosso quadrado unitário.

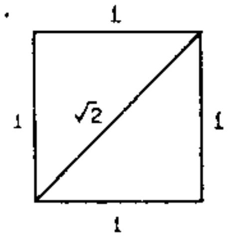


Figura 7. Um quadrado com lados de comprimento 1

Como cada ponto do eixo está a alguma distância da origem, fica intuitivamente claro que existe um número associado a cada um destes pontos. Por *números reais* entendemos a coleção de todos os números associados a todos os pontos. Todo número racional está incluído, porque existe um ponto, a uma distância apropriada da origem, para cada número racional. Podemos, então, dizer que os números racionais formam uma subclasse dos números reais.

No entanto, existem números reais que não são racionais. O número $\sqrt{2}$ não é racional, como provaremos mais adiante, neste capítulo. Qualquer número real, como $\sqrt{2}$, que não é racional, diz-se *irracional*. De acordo com esta definição, todo número real ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, na maneira descrita acima, é chamada *reta real*. Os pontos desta reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais.

Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois inteiros, diz-se irracional.

3.2 REPRESENTAÇÕES DECIMAIS

O número 1/3 é facilmente localizado na reta real: ele corresponde a um dos pontos de trissecção do segmento determinado pelos pontos zero e um (Fig. 8).

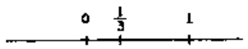


Figura 8

Consideremos, agora, a representação decimal de 1/3:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots.$$

Esta igualdade expressa 1/3 como uma soma de infinitos termos. Apesar de não haver fim para o número de termos, a soma tem um valor bem definido, isto é, 1/3. Se marcarmos os pontos correspondentes a

$$0{,}3; \quad 0{,}33; \quad 0{,}333; \quad 0{,}3333; \ldots$$

na reta real, obteremos uma seqüência de pontos que converge para o ponto 1/3. Este fato está ilustrado na Fig. 9, onde a unidade de comprimento foi ampliada. Da mesma maneira, qualquer número, com representação decimal infinita, está associado a algum

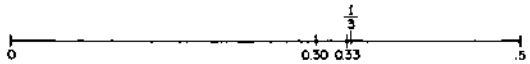


Figura 9

ponto da reta real. O ponto correspondente a 0,99999... é o ponto de convergência dos pontos correspondentes a

$$0{,}9; \quad 0{,}99; \quad 0{,}999; \quad 0{,}9999; \quad 0{,}99999; \quad \text{etc.}$$

Como se vê na Fig. 10, estes pontos convergem para o ponto 1, em

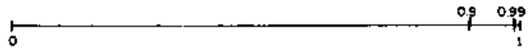


Figura 10

concordância com a igualdade $1 = 0{,}99999\ldots$ do capítulo anterior.

Consideremos, agora, o número

$$q = 0,101\ 001\ 000\ 100\ 001\ 000\ 001\ 000\ 000\ 1..\ ...,$$

já anteriormente usado como exemplo vemos que a este número também corresponde um determinado ponto da reta real. É aquele para o qual converge a seguinte seqüência de pontos:

0,1;
0,101;
0,101 001;
0,101 001 000 1;
0,101 001 000 100 001; etc.

O número q, por ter uma representação decimal não periódica, é um número irracional, e o ponto correspondente um ponto irracional.

Isto sugere uma outra interpretação para os números reais. Números reais constituem a coleção de todos os números que possuem representações decimais, finitas ou infinitas, tais como

17,34; 2,176; -6,307 222 22...; $q = 0,101\ 001\ 000\ 1...$.

De acordo com nossos estudos do capítulo anterior, podemos separar estes números em racionais e irracionais. Os números racionais são aqueles que possuem representação decimal finita ou periódica; os números irracionais são aqueles que não possuem representação decimal periódica, como o número q acima. Além do mais, como todo número com representação decimal finita (ou, números como 0,43000... com uma sucessão infinita de zeros) também pode ser escrito na forma de dízima periódica infinita, vamos, nesta secção, representar todos os números racionais por dízimas periódicas infinitas. (Por exemplo, vamos pensar no número 0,43 como sendo 0,42999...; talvez pareça esquisito, mas simplificará o que vem a seguir.)

Vamos mostrar agora que *números reais têm uma única representação decimal infinita*. É o mesmo que dizer: *duas frações decimais infinitas representam o mesmo número real somente se forem idênticas, algarismo por algarismo.*

Por que a representação decimal infinita é única? Responderemos a esta pergunta da seguinte maneira: considere dois números com representações decimais infinitas distintas. Sendo as representações diferentes, existe ao menos um algarismo onde esta diferença pode ser observada; por exemplo,

$$a = 17,923416...,$$
$$b = 17,923415....$$

A sucessão infinita de algarismos após o "6", na representação do número a, pode ser qualquer uma que o leitor queira imaginar, exceto uma infinidade de zeros. Uma observação análoga vale para o número b. O fato de excluirmos a possibilidade de uma sucessão infinita de zeros após o "6", nos garante que a é definitivamente maior do que 17,923416, o que, em símbolos, se escreve:

$$a > 17,923416$$

Por outro lado, b é no máximo igual a 17,923416, pois só teremos $b = 17{,}923416$ se a sucessão de algarismos após o "5", na representação de b, for constituída apenas de noves, isto é, se $b = 17{,}923415\overline{9}$. A afirmação de que b é no máximo igual a 17,923416, escreve-se, simbolicamente:

$$b \leqq 17{,}923416 \quad \text{ou} \quad 17{,}923416 \geqq b.$$

Estas desigualdades para a e b afirmam:

$$a > 17{,}923416 \geqq b$$

e, portanto, $a > b$. Concluímos, então, que a é maior do que b e isto, naturalmente, exclui a possibilidade de serem iguais. Este argumento foi aplicado ao caso específico de dois números particulares a e b, mas o raciocínio se generaliza imediatamente para qualquer par de números que tenham representações decimais infinitas distintas.

3.3 A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

Daremos, agora, a demonstração indireta, tradicional, da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e, no próximo capítulo, daremos outra demonstração, usando um argumento muito mais geral.

Mostramos, no Capítulo 1, que os inteiros pares são fechados em relação à multiplicação, o mesmo acontecendo com os inteiros ímpares. Em particular, o quadrado de um inteiro par é par e o quadrado de um inteiro ímpar é ímpar.

Suponhamos, agora, que $\sqrt{2}$ fosse um número racional, isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

onde a e b são inteiros. Suponhamos ainda, e isto é essencial para o argumento, que a/b seja uma fração irredutível, isto é, que a e b sejam primos entre si. Usaremos, especificamente, o fato de a e b não serem ambos pares porque, se o fossem, a/b não seria irredutível. Elevando ao quadrado a equação acima e simplificando, obtemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad a^2 = 2b^2.$$

O termo $2b^2$ representa um inteiro par, de modo que a^2 é um inteiro par e, portanto, a é um inteiro par, digamos $a = 2c$, onde c também é inteiro. Substituindo a por $2c$ na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$(2c)^2 = 2b^2, \qquad 4c^2 = 2b^2, \qquad 2c^2 = b^2.$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 é um inteiro par e, portanto, b é um inteiro par. Mas agora chegamos à conclusão de que a e b são ambos inteiros pares, enquanto a e b foram, inicialmente, supostos primos entre si. Esta contradição nos leva à conclusão de que não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma a/b com a e b inteiros e, portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

3.4 A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{3}$

Uma das demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{3}$ é semelhante à anterior, exceto que o argumento chave envolve divisibilidade por 3 e não por 2. Provaremos, como resultado preliminar, que *o quadrado de um inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 3*. Observemos, inicialmente, que um inteiro divisível por 3 é da forma $3n$, enquanto que um inteiro não divisível por 3 é da forma $3n+1$ ou $3n+2$. Então as equações

$$(3n)^2 = 9n^2 = 3(3n^2),$$

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1,$$

$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$$

confirmam a proposição acima.

Suponhamos agora que $\sqrt{3}$ fosse um número racional, digamos

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b},$$

onde a e b são inteiros. Novamente, como no caso do $\sqrt{2}$, suporemos a/b irredutível, de modo que a e b não sejam ambos divisíveis por 3. Elevando a equação ao quadrado e simplificando, obtemos

$$3 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 3b^2.$$

O inteiro $3b^2$ é divisível por 3, isto é, a^2 é divisível por 3. Portanto a é divisível por 3, digamos, $a = 3c$, onde c é um inteiro. Substituindo a por $3c$ na equação $a^2 = 3b^2$, obtemos

$$(3c)^2 = 3b^2, \quad 9c^2 = 3b^2, \quad 3c^2 = b^2.$$

Isto mostra que b^2 é divisível por 3 e, portanto, b é divisível por 3. Concluímos, assim, que a e b são ambos divisíveis por 3 e isto contraria a hipótese inicial de ser a/b irredutível. Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional

3.5 IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{6}$ E $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

As demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ dependeram de propriedades da divisibilidade de inteiros por 2 e por 3, respectivamente, mas a demonstração correspondente a $\sqrt{6}$ pode ser feita, de modo a recair na divisibilidade por 2 ou por 3. Por exemplo, acompanhando a demonstração feita para $\sqrt{2}$, podemos supor que

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

onde os inteiros a e b não são ambos pares. Elevando ao quadrado, obtemos

$$6 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 6b^2.$$

Mas, $6b^2$ é par, assim a^2 é par e, portanto, a é par, digamos $a = 2c$. Podemos, então, escrever

$$\therefore a^2 = 6b^2, \quad (2c)^2 = 6b^2, \quad 4c^2 = 6b^2, \quad 2c^2 = 3b^2.$$

Isto nos diz que $3b^2$ é par, de modo que b^2 é par e, portanto, b é par. Mas foi suposto que a e b não fossem ambos pares e, portanto, $\sqrt{6}$ é irracional. O leitor pode, a título de exercício, deduzir o mesmo resultado fazendo uma demonstração análoga à que foi feita para $\sqrt{3}$.

Como um último exemplo, neste capítulo, trataremos da irracionalidade de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fazendo a demonstração recair na irracionalidade de $\sqrt{6}$. Suponhamos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse um número racional, digamos r, isto é,

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2, \quad 2\sqrt{6} = r^2-5, \quad \sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}.$$

Mas, números racionais são fechados em relação às quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero) e, portanto, $\frac{1}{2}(r^2-5)$ é um número racional. Mas $\sqrt{6}$ é irracional e, assim, chegamos a uma contradição. Concluímos, então, que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Sabendo que o inteiro $n = a \cdot b$ é tal que $\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b}$ é irracional, pode-se, imitando a demonstração acima, provar que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional.

Problemas - Lista 10

1. Demonstre, de duas maneiras, que o quadrado de um inteiro é divisível por 5 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 5:
   (a) Inicialmente faça uma demonstração paralela à do texto no caso da divisibilidade por 3. Parta do fato de que todo inteiro tem uma das 5 formas: $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$.
   (b) Em seguida, faça outra demonstração, usando o Teorema Fundamental da Aritmética. Este teorema encontra-se no Capítulo 1 e também no Apêndice B.
2. Demonstre que $\sqrt{5}$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt{15}$ é irracional.
4. Demonstre que $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ é irracional.
5. Demonstre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.
6. Dado que α (alfa) é um número irracional, demonstre que $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ também é irracional.
7. O número 0 é racional ou irracional?

3.6 AS PALAVRAS QUE USAMOS

A linguagem que usamos para descrever as várias classes de números faz parte de nossa herança histórica e, sendo assim, é pouco provável que ela mude, apesar de sentirmos que algumas palavras sejam ligeiramente peculiares. Por exemplo, na linguagem de todo dia, ao dizermos que algo é "irracional", queremos, em geral, dizer que este algo é desprovido de bom senso, sendo, portanto, contrário à razão. Mas, é claro que não consideramos números irracionais como contrários à razão. Aparentemente, os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais porque eles pensavam que, dados dois segmentos quaisquer, como o lado e a diagonal de um quadrado, existiriam sempre inteiros a e b tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse a/b. O significado matemático da palavra "racional" se refere à razão de números inteiros e "irracional" se refere a ausência de uma tal razão.

A palavra "comensurável" tem sido usada para descrever dois comprimentos cuja razão é um número racional. Duas grandezas *comensuráveis* são tais que uma delas pode ser "medida" por intermédio da outra, no seguinte sentido: Existe um inteiro k tal que, se dividirmos o primeiro segmento em k partes iguais, cada uma de comprimento ℓ, o segundo segmento também poderá ser dividido em um número inteiro, digamos m, de partes iguais,

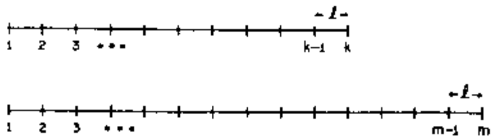


Figura 11

cada uma de comprimento ℓ. Neste caso, a razão dos comprimentos dos dois segmentos será

$$\frac{k\ell}{m\ell} = \frac{k}{m},$$

que é um número racional (veja Fig. 11). Porém, se os segmentos forem tais que a razão de seus comprimentos é irracional (por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado), então a construção acima nunca poderá ser feita, não importando quão grande escolhamos k (e quão pequeno escolhamos ℓ)! Neste caso, os segmentos dados se dizem *incomensuráveis*.

Números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24}$ ou, em geral, números da forma $\sqrt[n]{a}$, onde a é racional e n inteiro, são chamado *radicais*.

O termo "números reais" é uma outra herança do passado. Se fôssemos escolher um nome hoje em dia, talvez os chamássemos de "números uni-dimensionais". De qualquer modo, não consideramos "irreais" números que não sejam reais. O leitor estará provavelmente familiarizado com os números complexos dos quais os números reais formam uma subclasse. Um número complexo é um número da forma $a + bi$, onde a e b são reais e i satisfaz a fórmula quadrática $i^2 = -1$. Esta definição está sendo introduzida apenas para completar a discussão sobre classe de números. O escopo deste livro se limita aos números reais, portanto não nos ocuparemos da classe mais ampla dos números complexos.

3.7 UMA APLICAÇÃO À GEOMETRIA

Muitos textos didáticos de Geometria, do 1º e 2º graus, apresentam demonstrações incompletas, quando estas envolvem números irracionais. A falha ocorre quando o resultado é demonstrado apenas para o caso racional, deixando o caso irracional inacabado. Isto acontece freqüentemente com o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Se três paralelas são cortadas por duas transversais, com ponto de intersecção* A, B, C, A', B', C', *como na Fig. 12, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

onde, por exemplo, AB *representa o comprimento do segmento determinado por* A *e* B.

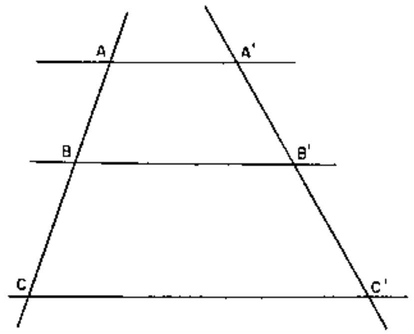


Figura 12

Este teorema pode ser usado para demonstrar o teorema fundamental sobre semelhança de triângulos: *se os três ângulos de um triângulo forem, respectivamente, iguais aos três ângulos de outro triângulo, então os lados correspondentes serão proporcionais* (Fig. 13). Este resultado, por sua vez, é muitas vezes

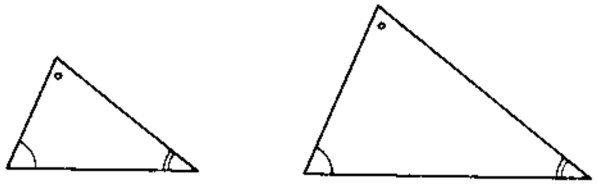


Figura 13

usado para demonstrar o Teorema de Pitágoras e, assim, Trigonometria e Geometria Analítica são construídas com base nestes teoremas.

Vamos, agora, provar o Teorema 3.1 para o caso em que AB/BC é irracional. Vamos aceitar a validade do Teorema 3.1 no caso de AB/BC ser racional, pois esta parte do teorema é, em geral, demonstrada nos livros de Geometria Elementar. Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1 para AB/BC irracional, será útil estabelecer o seguinte resultado preliminar:

Teorema 3.2. *Se* m *e* n *forem inteiros positivos tais que*

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

então

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Demonstração. Começaremos com uma construção. Vamos dividir o segmento BC em n partes iguais, cada parte de comprimento α, de modo que $BC = n\alpha$. Marquemos, a seguir, mais m destes pedaços de comprimento α ao longo do segmento BA, terminando no ponto D.

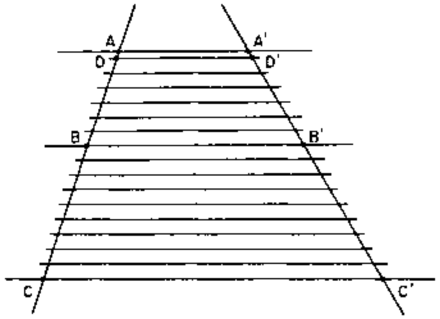


Figura 14

Provaremos, inicialmente, que D está entre B e A, como na Fig. 14. Como $BC = n\alpha$ e $DB = m\alpha$, podemos escrever

$$\frac{DB}{BC} = \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n};$$

por hipótese

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

e, assim,

$$\frac{DB}{BC} < \frac{AB}{BC}.$$

Esta última desigualdade implica $DB < AB$, pois ambas as frações têm o mesmo denominador BC. Assim, sendo DB mais curto do que AB, segue-se que D está no interior do segmento AB.

Em seguida, tracemos retas paralelas a AA' por todos os pontos de divisão, sendo D' o ponto correspondente de D, no lado direito, como na Fig. 14. Usando o Teorema 3.1 no caso racional (que estamos supondo válido), $B'C'$ ficará dividido em n partes iguais e $D'B'$, em m partes iguais do mesmo comprimento, de modo que

$$\frac{D'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}.$$

No entanto, na Fig. 14, observamos que $D'B' < A'B'$ e por isso concluímos que

$$\frac{D'B'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

Corolário do Teorema 3.2. *Se* $\frac{m}{n} > \frac{AB}{BC}$, *então* $\frac{m}{n} > \frac{A'B'}{B'C'}$.

Este corolário é análogo ao Teorema 3.2 e, portanto, sua demonstração também é análoga.

Demonstramos, assim, o Teorema 3.2 e um corolário; vamos agora usá-los para demonstrar o Teorema 3.1, no caso irracional. Seja β um número irracional representando a razão AB/BC. Usaremos a representação decimal de β, como na Secção 3.2.

Para ilustrar a passagem seguinte, façamos β assumir o valor $\pi = 3{,}14159\ldots$, por exemplo. Podemos, então, escrever

$$\frac{3}{1} < \beta < \frac{4}{1},$$

$$(1) \qquad \frac{31}{10} < \beta < \frac{32}{10}$$

$$\frac{314}{100} < \beta < \frac{315}{100}$$

$$\frac{3141}{1000} < \beta < \frac{3142}{1000}, \ldots, \text{ etc.}$$

As frações, à esquerda, são obtidas, tomando os números 3; 3,1; 3,14; 3,141; da representação decimal de π. As frações do lado direito são obtidas, aumentando estes mesmos números de 1; 0,1; 0,01; 0,001; etc.

A cadeia de desigualdades (1) é infinita; escrevemos somente as primeiras quatro. Estas desigualdades *caracterizam* o valor particular do β em questão, isto é, caracterizam π. Ou seja, se um número β satisfizer todas as desigualdades (1), então este número é igual a π.

As desigualdades (1) foram escritas em conexão com um exemplo ilustrativo, onde β tinha o valor π. Abandonaremos agora este exemplo, mas ressaltamos que, qualquer que seja o valor irracional que β possa ter, sua representação decimal fornecerá uma cadeia de desigualdades

$$\frac{a_1}{1} < \beta < \frac{1+a_1}{1},$$

$$\frac{a_2}{10} < \beta < \frac{1+a_2}{10},$$

$$\frac{a_3}{100} < \beta < \frac{1+a_3}{100} \tag{2}$$

$$\frac{a_4}{1000} < \beta < \frac{1+a_4}{1000}, \ldots, \text{ etc.}$$

que caracterizará β de modo único e, em cada desigualdade, β estará entre dois números racionais. Os símbolos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ representam inteiros.

Nossa intenção é fazer β' representar a razão $A'B'/B'C'$ e demonstrar que β' também satisfaz as desigualdades (2), tal qual β. Mas, estas desigualdades caracterizam o número β e, portanto, β' ficará identificado com β, de modo que

$$\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \beta'.$$

Só falta, então, demonstrar que β' satisfaz as desigualdades (2). Para isto usaremos o Teorema 3.2. Inicialmente, escolhamos qualquer um dos números $a_1/1$, $a_2/10$, $a_3/100$, etc., digamos, $a_3/100$ e interpretemos este como sendo o número racional m/n do Teorema 3.2. Então, a hipótese do Teorema 3.2,

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

se transforma em

$$\frac{a_3}{100} < \beta,$$

e isto é válido por causa das desigualdades (2). Logo, o Teorema 3.2 nos diz que

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'},$$

isto é,

$$\frac{a_3}{100} < \beta'.$$

Vemos, assim, que β' satisfaz

$$\frac{a_1}{1} < \beta', \quad \frac{a_2}{10} < \beta', \quad \frac{a_3}{100} < \beta', \quad \frac{a_4}{1000} < \beta', \quad \text{etc.}$$

Fazendo um uso análogo do corolário do Teorema 3.2, obtemos as desigualdades

$$\beta' < \frac{1+a_1}{1}, \quad \beta' < \frac{1+a_2}{10}, \quad \beta' < \frac{1+a_3}{100}, \quad \beta' < \frac{1+a_4}{1000}, \quad \text{etc.}$$

Portanto, β' satisfaz as desigualdades (2) tal qual β; logo, $\beta = \beta'$, o que completa a demonstração do Teorema 3.1.

3.8 UM RESUMO

Neste capítulo mostramos que todo número real pode ser posto em correspondência com exatamente um ponto da "reta real". Vimos também que todo número real tem exatamente uma representação decimal infinita (desde que excluamos uma sucessão infinita de zeros, isto é, representações decimais finitas). Esta representação decimal infinita foi usada na Secção 3.7 para demonstrar um teorema chave da Geometria Elementar. Além disso, demonstramos a irracionalidade de certos números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, etc. Nossos métodos, no entanto, foram bastante particulares e não descrevemos nenhum procedimento muito geral para determinar se um dado número é racional.

No próximo capítulo estudaremos números irracionais de uma maneira muito mais sistemática. Vamos achar um processo pelo qual uma grande classe de números pode ser classificada como uma classe de números irracionais.

NÚMEROS IRRACIONAIS

No decorrer deste capítulo e do próximo vamos aprender que os números reais podem ser classificados não apenas em racionais e irracionais, mas também em duas outras categorias. Uma categoria contém os assim chamados *números algébricos*, isto é, números que são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros, e uma outra contém todos os demais números, sendo estes chamados *números transcendentes*. A distinção se tornará mais significativa no decorrer da exposição. Porém mencionaremos imediatamente que alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, mas todos os números transcendentes são irracionais.

A finalidade global deste capítulo é chegar a um método sistemático que permita determinar se um dado número algébrico é ou não racional. (Não vamos, realmente, tratar a classe dos números algébricos em toda sua generalidade, mas vamos aplicar nosso método a muitos exemplos.) Antes de obter este método, estudaremos algumas propriedades simples dos números irracionais.

4.1 PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

Em contraste com os números racionais, que são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero), os números irracionais não possuem nenhuma destas propriedades. Antes de mostrar este fato, vamos demonstrar um teorema que nos permitirá produzir uma infinidade de números irracionais a partir de um número irracional dado.

Teorema 4.1. *Seja* α *um número irracional qualquer e* r *um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de* r *e* α *resultarão em números irracionais. Também* $-\alpha$ *e* α^{-1} *são irracionais.*

Demonstração. Estes resultados podem ser facilmente obtidos através de demonstrações indiretas. Suponhamos, para começar, que $-\alpha$ fosse racional, digamos, $-\alpha = r'$, onde r' é um pressuposto número racional. Então teríamos $\alpha = -r'$, onde $-r'$ também é um número racional. Isto é uma contradição, porque α é irracional.

O teorema afirma que $-\alpha$, α^{-1}, $\alpha+r$, $\alpha-r$, $r-\alpha$, $r\alpha$, α/r e r/α são irracionais. Já vimos o caso do $-\alpha$. Para provar a irracionalidade de α^{-1}, observamos tratar-se de um caso especial de r/α com $r = 1$. Portanto, não há necessidade de tratar este caso separadamente.

Vamos provar os seis casos restantes de uma só vez, por atacado. Se uma ou mais destas expressões fossem racionais, então teríamos uma ou mais das seguintes equações:

$$\alpha+r = r_1,\quad \alpha-r = r_2,\quad r-\alpha = r_3,\quad r\alpha = r_4,\ \frac{\alpha}{r} = r_5,\ \frac{r}{\alpha} = r_6,$$

onde $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ representam números racionais. Resolvendo estas equações em α, obteríamos

$$\alpha = r_1-r,\quad \alpha = r_2+r,\quad \alpha = r-r_3,\quad \alpha = \frac{r_4}{r},\ \alpha = rr_5,\ \alpha = \frac{r}{r_6}.$$

Os segundos membros destas equações são números racionais por causa das propriedades de fechamento dos números racionais. Mas nenhuma destas igualdades é verdadeira, pois α é irracional. Portanto, é impossível que qualquer um dos números $\alpha+r$, $\alpha-r$, etc. seja racional, completando assim a demonstração do teorema.

Usando o Teorema 4.1 podemos construir uma grande classe de números irracionais a partir de um só destes números, por exemplo, a partir de $\sqrt{2}$. Aplicando cada uma das afirmações do teorema, podemos dizer, por exemplo, que

$$-\sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{2}+5,\quad 3-\sqrt{2},\quad -2\sqrt{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{7},\ \frac{4}{\sqrt{2}}$$

são todos irracionais. Como uma infinidade de números racionais pode ser usada em cada afirmação do teorema, fica claro que podemos produzir assim uma infinidade de números irracionais.

Além do mais, qualquer um dos números assim construídos, como por exemplo $\sqrt{2} + 5$, pode agora ser usado como um novo número irracional α no teorema. E assim, uma nova infinidade de números irracionais,

$$-\sqrt{2}-5, \quad \frac{1}{\sqrt{2}+5}, \quad \sqrt{2}+8, \quad 5\sqrt{2}+25, \quad \frac{\sqrt{2}+5}{7}, \quad \text{etc.},$$

poderá ser gerada a partir deste número.

Será que os números irracionais são fechados em relação à adição? Não, não são. Para demonstrar este fato basta exibirmos dois números irracionais cuja soma seja racional. No capítulo anterior vimos que $\sqrt{2}$ é irracional e, portanto, pelo Teorema 4.1, $-\sqrt{2}$ é irracional. Mas a soma de $\sqrt{2}$ com $-\sqrt{2}$ é 0, que é racional; o mesmo acontece com a soma de $3+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$, por exemplo. De um modo mais geral, a soma de $r_1+\alpha$ com $r_2-\alpha$ (onde r_1 e r_2 são racionais e α irracional), é racional.

Dizer que os números irracionais não são fechados em relação à adição não significa que se somarmos dois números irracionais *quaisquer* a soma será racional. Significa apenas que existe pelo menos um caso onde a soma *é* racional. O resultado obtido, quando dois números irracionais são somados, pode ser racional ou irracional, dependendo dos dois números iniciais. Enquanto a soma de $\sqrt{2}$ com $-\sqrt{2}$ é um número racional, a soma de $\sqrt{2}$ com $\sqrt{3}$ é um número irracional, como foi visto no capítulo anterior.

Será que os números irracionais são fechados em relação à subtração? Não, pois, por exemplo, se subtrairmos $\sqrt{2}$ de si mesmo, obteremos o número racional 0.

Analogamente, os números irracionais não são fechados em relação à multiplicação ou divisão. Estes resultados são tão semelhantes aos anteriores que deixaremos suas demonstrações para o leitor, na lista de problemas a seguir.

Problemas - Lista 11

(Em alguns dos problemas será útil usar alguns dos resultados do capítulo anterior, a saber, que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ são irracionais).

1. Exiba dois números irracionais cuja diferença seja irracional.
2. Exiba dois números irracionais cujo produto seja racional e demonstre assim que os números irracionais não são fechados em relação à multiplicação.
3. Exiba dois números irracionais cujo produto seja irracional.
4. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional e demonstre assim que os números irracionais não são fechados em relação à divisão.
5. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional.

*6. Demonstre que $\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)$ é irracional.

7. Seja α um número irracional positivo. Demonstre que $\sqrt{\alpha}$ é irracional.
8. Dado que α e β são irracionais, mas $\alpha+\beta$ é racional, demonstre que $\alpha-\beta$ e $\alpha+2\beta$ são irracionais.

4.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Demonstramos no capítulo anterior que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$ são irracionais. Como é de se esperar (e talvez o leitor já o saiba), números como $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[5]{91}$ também são irracionais. Gostaríamos, agora, de estabelecer a irracionalidade de todos estes números por um processo abrangente, ao invés de estudar cada número separadamente. Para isto vamos transferir a ênfase dos números em si para equações algébricas simples que tenham estes números como raízes. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é uma raiz da equação $x^2-2=0$ ou, em outras palavras, $\sqrt{2}$ é uma solução de $x^2-2=0$, ou ainda, $\sqrt{2}$ satisfaz a equação $x^2-2=0$. Analogamente, os outros números acima mencionados satisfazem equações como as seguintes:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3}, & x^2-3=0, \\ \sqrt{6}, & x^2-6=0, \\ \sqrt{7}, & x^2-7=0, \\ \sqrt[3]{5}, & x^3-5=0, \\ \sqrt[5]{91}, & x^5-91=0. \end{array}$$

Vamos provar que estas equações e, mais geralmente, todas as equações satisfazendo certas condições, não possuem raízes racionais. Para começar, precisaremos definir alguns termos usados para descrever equações.

Por um *polinômio de 2º grau em* x entendemos uma expressão da forma ax^2+bx+c, onde a, b e c são chamados

coeficientes. Um *polinômio de grau 3* é da forma ax^3+bx^2+cx+d. Para evitar a introdução de novas letras à medida que aumentarmos o grau, convém escrever

$$c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0.$$

Um polinômio de grau n (onde n é um inteiro positivo) tem a forma $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0$, com c_n diferente de zero. Uma *equação polinomial* é uma igualdade da forma

(1) $$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0=0;$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ são chamados *coeficientes*.

Exemplo. Identifique os valores de n, c_n, etc. quando a equação

$$3x^6+2x^5-x^4+10x^3+4x-7=0$$

for interpretada como tendo a forma (1) acima.

Solução. Comparando, diretamente, vemos que

$n=6$, $c_6=3$, $c_5=2$, $c_4=-1$, $c_3=10$, $c_2=0$, $c_1=4$, $c_0=-7$.

Observe que a exigência de serem inteiros os coeficientes da eq. (1) não é mais restritiva do que a exigência de serem estes coeficientes racionais; pois se eles forem racionais, então $c_0 = a_0/b_0$, $c_1 = a_1/b_1$, $c_2 = a_2/b_2, \ldots$, onde os a's e os b's são inteiros. Todas estas frações podem ser escritas com um denominador comum, por exemplo, o produto $b_0 b_1 b_2 \ldots b_n$, pelo qual podemos multiplicar ambos os membros da equação e obter, assim, uma nova, com coeficientes inteiros e cujas raízes são as mesmas da equação original.

Recordemos que uma *raiz* de uma equação em x é um número, que, substituído no lugar de x, satisfaz a equação. Por exemplo, já observamos que $\sqrt{7}$ é uma raiz de $x^2 - 7 = 0$.

Exemplo. O número 2/5 é raiz de $10x^3+6x^2+x-2 = 0$?

Solução. Substituindo 2/5 no lugar de x, obtemos

$$10\left(\frac{2}{5}\right)^3 + 6\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} - 2 = 0,$$

e esta é uma sentença correta da aritmética. Portanto, 2/5 é uma raiz da equação.

Estamos prontos, agora, para retornar ao ponto principal. Repetimos que o método que vamos desenvolver para decidir se um dado número é ou não racional pode ser aplicado se, e somente se, conseguirmos escrever uma equação polinomial que tenha por raiz o número em consideração. O método pode ser usado não apenas para os números cuja irracionalidade ficou provada no capítulo anterior, mas também para qualquer número que possa ser

escrito como uma combinação finita dos símbolos +, -, ×, ÷ e radicais $\sqrt[n]{r}$ de números racionais. Por exemplo,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt[10]{7} - \sqrt[11]{7}}}{\sqrt[156]{25}}$$

é um caso complicado do tipo de número que estamos descrevendo.

Não vamos provar, neste livro, que todos estes números são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, mas vamos escrever equações polinomiais satisfeitas por muitos deles.

Problemas - Lista 12

1. Indique os valores de n, c_n, etc., quando as seguintes equações são interpretadas como sendo da forma da eq. (1) acima:

   (a) $15x^3 - 23x^2 + 9x - 1 = 0$;
   (b) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$;
   (c) $2x^3 + 7x^2 - 3x - 18 = 0$;
   (d) $2x^4 - x^2 - 3x + 5 = 0$;
   (e) $3x^5 - 5x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$;
   (f) $x^4 - 3x^2 - 5x + 9 = 0$.

2. Em relação às equações do exercício anterior:

   (a) o número 1/3 é uma raiz de (a)?
   (b) o número -2/3 é uma raiz de (b)?

(c) o número $3/2$ é uma raiz de (c)?

(d) o número 2 é uma raiz de (d)?

(e) o número -2 é uma raiz de (e)?

(f) o número $1/2$ é uma raiz de (f)?

3. Prove que $\sqrt{7}$ é uma raiz de $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3} = 0$.

4. Prove que se um número for raiz de uma equação polinomial do tipo

$$\frac{a_3}{b_3}x^3 + \frac{a_2}{b_2}x^2 + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0} = 0$$

com coeficientes racionais a_3/b_3, etc., então este número será raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros.

5. Generalize o resultado do problema anterior, do caso de equações de grau 3, para equação de grau n.

4.3 RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

É nosso propósito deduzir agora uma regra simples, sob forma do Teorema 4.3, abaixo, que nos possibilite encontrar todas as raízes racionais de uma dada equação polinomial com coeficientes inteiros. Seremos assim capazes de separar as raízes racionais das irracionais de uma equação e, assim, estabelecer a irracionalidade de uma ampla classe de números.

Inicialmente precisaremos de um resultado auxiliar.

Teorema 4.2. *Sejam u, v e w inteiros tais que u seja um divisor de vw e u e v não tenham fatores primos comuns. Então u é um divisor de w. De um modo mais geral, se u for um divisor de $v^n w$, onde n é um inteiro positivo qualquer, e u e v não tiverem fatores primos comuns, então u será um divisor de w.*

Antes de apresentar uma demonstração, ilustremos esta proposição com alguns exemplos.

(1) Sejam $u = 2$, $v = 3$ e $vw = 12$. Os números 2 e 3 não têm fatores primos comuns. Também, 2 é um divisor de 12, de modo que as hipóteses do Teorema 4.2 estão satisfeitas. A conclusão de que 2 é um divisor de $w = 12/v = 4$ é válida.

(2) Sejam $u = 4$, $v = 5$ e $v^3 w = 500$. Os números 4 e 5 não têm fatores primos comuns e 4 é um divisor de 500. A afirmação mais geral de que 4 é um divisor de $w = 500/125 = 4$ também é válida.

Demonstração. O ingrediente principal desta demonstração é o Teorema Fundamental da Aritmética, demonstrado no Apêndice B na parte final deste livro. Ele nos assegura que existe apenas uma maneira de decompor u, v e w em fatores primos. Como u é um divisor de vw, todos os fatores primos de u ocorrerão também em vw; além do mais, se algum primo p ocorrer em u, elevado a um expoente α, ele também ocorrerá em vw com, ao menos, o mesmo expoente, isto é, ocorrerá em vw com um expoente β, onde $\beta \geq \alpha$. Como u e v não têm fatores primos comuns, segue-se que todos os fatores primos de u ocorrerão na fatoração de w, com, ao menos, o mesmo expoente. Portanto u é um divisor de w.

Podemos usar o mesmo argumento para a última afirmação do teorema. A hipótese de u e v não possuirem fatores primos comuns nos assegura que u e v^n não possuem fatores primos comuns. Novamente segue-se que v^n não contribui em nada ao fato de u ser um divisor de $v^n w$ e, portanto, u terá que ser um divisor de w.

Temos agora informação suficiente para enunciar e provar a seguinte proposição:

Teorema 4.3. *Consideremos uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros:*

$$(1) \quad c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0.$$

Se esta equação tiver uma raiz racional a/b, onde a/b é uma fração irredutível, então a será um divisor de c_0 e b um divisor de c_n.

Novamente, ilustraremos esta afirmação através de um exemplo, antes de apresentarmos a demonstração. Consideremos a equação

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0.$$

O teorema afirma que se a/b for uma raiz racional, a/b irredutível, então a será um divisor de -3 e b será um divisor de 2. Portanto, os possíveis valores de a são $+1, -1, +3$ e -3 e os de b são $+1, -1, +2$ e -2. Combinando estas possibilidades, vemos que o seguinte conjunto contém todas as possíveis raízes racionais:

$$\frac{+1}{+1},\ \frac{+1}{-1},\ \frac{+1}{+2},\ \frac{+1}{-2},\ \frac{-1}{+1},\ \frac{-1}{-1},\ \frac{-1}{+2},\ \frac{-1}{-2},$$

$$\frac{+3}{+1},\ \frac{+3}{-1},\ \frac{+3}{+2},\ \frac{+3}{-2},\ \frac{-3}{+1},\ \frac{-3}{-1},\ \frac{-3}{+2},\ \frac{-3}{-2}.$$

Esta lista contém apenas 8 números distintos, a saber, 1, -1, $1/2$, $-1/2$, 3, -3, $3/2$ e $-3/2$. Destes, somente os números 1, $1/2$ e 3 são realmente raízes da equação, como o leitor poderá verificar por substituição direta.

Demonstração. Seja a/b uma raiz da equação (1). Isto significa que vale a igualdade abaixo, onde a/b foi colocado no lugar de x:

$$(2) \quad c^n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0.$$

Começaremos dando uma demonstração para o caso especial de $n = 3$, por ser mais fácil para o leitor acompanhar. Em seguida faremos uma demonstração análoga para o caso geral.

No caso $n = 3$, a eq. (2) fica sendo

$$c_3\left(\frac{a}{b}\right)^3 + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0.$$

Multiplicando por b^3, obtemos

(3) $$c_3a^3 + c_2a^2b + c_1ab^2 + c_0b^3 = 0.$$

Inicialmente escrevemos eq. (3) na forma

$$c_3a^3 = -c_2a^2b - c_1ab^2 - c_0b^3,$$

ou

$$c_3a^3 = b(-c_2a^2 - c_1ab - c_0b^2).$$

Isto mostra que b é um divisor de c_3a^3. Podemos, a esta altura, aplicar o Teorema 4.2 com b, a e c_3, respectivamente, no lugar de u, v e w. A hipótese do Teorema 4.2, de que u e v não têm fatores primos comuns, está satisfeita, pois a fração a/b é irredutível, de modo que a e b não têm fatores primos comuns. O Teorema 4.2 nos diz então que b é um divisor de c_3. Esta é uma parte da conclusão do Teorema 4.3, porque sendo $n = 3$, c_n é c_3.

Em seguida, escrevemos a eq. (3) na forma

$$c_0b^3 = -c_1ab^2 - c_2a^2b - c_3a^3,$$

ou

$$c_0b^3 = a(-c_1b^2 - c_2ab - c_3a^2).$$

Isto mostra que a é um divisor de c_0b^3. Usando um argumento praticamente idêntico ao anterior, isto é, aplicando novamente o Teorema 4.2, podemos concluir que a é um divisor de c_0 e isto completa a demonstração para o caso $n = 3$.

Para demonstrar o teorema para um n qualquer, retornemos à eq. (2) e multipliquemos ambos os membros por b^n, obtendo

(4) $$c_na^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + c_2a^2b^{n-2} + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0.$$

(4) pode ser reescrita como

$$c_na^n = -c_{n-1}a^{n-1}b - \ldots - c_2a^2b^{n-2} - c_1ab^{n-1} - c_0b^n,$$

ou

$$c_na^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - \ldots - c_2a^2b^{n-3} - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}).$$

Isto mostra que b é um divisor de c_na^n. Aplicando o Teorema 4.2, com b, a e c_n, respectivamente, no lugar de u, v e w, concluímos que b é um divisor de c_n.

Reescrevemos, em seguida, a eq. (4) como

$$c_0b^n = a(-c_na^{n-1} - \ldots - c_2ab^{n-2} - c_1b^{n-1}).$$

Isto mostra que a é um divisor de c_0b^n. Novamente, aplicando o Teorema 4.2, com a, b e c_0, respectivamente, no lugar de u, v e w, concluímos que a é um divisor de c_0. Isto completa a demonstração do Teorema 4.3.

Poderíamos ter evitado o argumento do último parágrafo, observando que existe uma simetria na eq. (4) e que o papel de b em relação a c_n, nesta equação, é igual ao de a em relação a c_0.

Examinemos a situação que ocorre quando $c_n = 1$.

Corolário 1. *Consideremos uma equação da forma*

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros. Se esta equação possuir uma raiz racional, ela será um inteiro; além do mais, esta raiz inteira será um divisor de c_0.

Demonstração. Consideremos uma raiz racional a/b. Podemos supor que b seja um inteiro positivo, porque se b fosse negativo poderíamos absorver o sinal menos em a. De acordo com o Teorema 4.3, b terá que ser um divisor de c_n; isto é, b terá que ser um divisor de 1. Mas, +1 e -1 são os únicos divisores de 1, logo, devemos ter $b = +1$, pois excluímos valores negativos para b. Conseqüentemente, qualquer raiz racional será da forma $a/1$ e portanto será um inteiro a. Ainda pelo Teorema 4.3, sabemos que a será um divisor de c_0 e isto completa a demonstração do corolário.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt{7}$ é irracional.

Solução. $\sqrt{7}$ é uma raiz de $x^2 - 7 = 0$. Aqui, de acordo com nossa notação, $c_2 = 1$ e $c_0 = -7$.

Existem agora dois caminhos. Um deles é usar o Corolário 1 e dizer: se $x^2 - 7 = 0$ tiver uma raiz racional a/b, então esta raiz terá que ser um inteiro. Podemos mostrar que $\sqrt{7}$ não é um inteiro, portanto não será uma raiz racional de $x^2-7=0$. Assim, $\sqrt{7}$ deverá ser uma raiz irracional. Obviamente $\sqrt{7}$ não é um inteiro, pois está entre dois inteiros consecutivos 2 e 3; isto, por sua vez, decorre das desigualdades

$$4 < 7 < 9,$$
$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9},$$
$$2 < \sqrt{7} < 3.$$

Um outro caminho faz uso do Corolário 1 na sua forma completa, dizendo que qualquer raiz racional de $x^2 - 7 = 0$ é um inteiro, divisor exato de -7. Os únicos divisores de -7 são 1, -1, 7 e -7. Mas nenhum destes é uma raiz, como pode ser verificado diretamente; as igualdades

$$1^2-7 = 0, \quad (-1)^2-7 = 0, \quad 7^2-7 = 0 \quad \text{e} \quad (-7)^2-7 = 0$$

são todas falsas. Portanto $x^2 - 7 = 0$ não tem raiz inteira, logo não tem raiz racional, de modo que $\sqrt{7}$ é um número irracional.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

Solução. $\sqrt[3]{5}$ é uma raiz de $x^3 - 5 = 0$. De acordo com o Corolário 1, se esta equação tivesse uma raiz racional, ela seria um inteiro, divisor de 5. Os divisores de 5 são $+1$, -1, $+5$ e -5. Mas nenhum destes é uma raiz, pois as igualdades

$$1^3-5 = 0, \quad (-1)^3-5 = 0, \quad 5^3-5 = 0 \quad e \quad (-5)^3-5 = 0$$

são todas falsas. Portanto $x^3 - 5 = 0$ não tem raízes racionais e daí $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

Estes dois exemplos são casos especiais do seguinte resultado, mais geral:

Corolário 2. *Um número da forma* $\sqrt[n]{a}$, *onde* a *e* n *são inteiros positivos, ou é irracional ou é um inteiro; no segundo caso,* a *é uma* n*-ésima potência de um inteiro.*

Demonstração. O resultado decorre do Corolário 1, porque $\sqrt[n]{a}$ é uma raiz de $x^n-a = 0$, e se esta equação tiver uma raiz racional, ela terá que ser um inteiro. Além do mais, se $\sqrt[n]{a}$ for um inteiro, digamos k, então $a = k^n$.

Problemas - Lista 13

1. Demonstre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ e $\sqrt[5]{91}$ são irracionais.
2. Demonstre que $(4\sqrt{13} - 3)/6$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt{15}$ é irracional.

4. Demonstre que $4/(16 - 3\sqrt{15})$ é irracional.
5. Demonstre que $\sqrt[3]{6}$ é irracional.
6. Demonstre que $(1/3)(2\sqrt[3]{6} + 7)$ é irracional.
7. Demonstre que o Teorema 4.3 se transforma numa proposição falsa se omitirmos as palavras "onde a/b é uma fração irredutível".

4.4 EXEMPLOS ADICIONAIS

No Capítulo 3 demonstramos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional, usando um método aplicável a uma classe bastante ampla de números. No entanto, uma classe ainda mais ampla pode ser tratada com ajuda do Corolário 1.

Examinemos, novamente, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Se escrevermos $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, teremos

$$x - \sqrt{2} = \sqrt{3}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3,$$

e rearranjando os termos, temos

$$x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}.$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2,$$

ou

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

A maneira como a eq. (5) foi construída mostra que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é uma de suas raízes. Apliquemos, a seguir, o Corolário 1, para mostrar que a eq. (5) não possui raízes racionais e poderemos, então, concluir que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

A aplicação do Corolário 1 à eq. (5) nos diz que se esta equação tivesse raízes racionais, estas deveriam ser inteiros, divisores de 1. Mas os únicos divisores de 1 são $+1$ e -1, nenhum dos quais é uma raiz de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Concluímos assim que a eq. (5) não possui raízes racionais e que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Uma outra maneira de se chegar à mesma conclusão é a seguinte: ao invés de testar se $+1$ e -1 são raízes da eq. (5), podemos argumentar que mesmo se $+1$ ou -1 ou ambos, fossem raízes da eq. (5), pode-se observar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é diferente de $+1$ e de -1; por exemplo, podemos argumentar que tanto $\sqrt{2}$ como $\sqrt{3}$ são maiores do que 1, de modo que sua soma é grande demais para ser 1 ou -1. Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não está entre as possíveis raízes racionais da eq. (5), independentemente do fato de 1 ou -1 serem raízes. Segue-se que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional.

Solução. Escrevendo $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, vemos que

$$x + \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}.$$

Elevando ambos os membros ao cubo, obtemos

$$x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3} = 2.$$

Quando os termos são reagrupados,

$$x^3 + 9x - 2 = -3\sqrt{3}(x^2 + 1).$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 36x + 4 = 27(x^4 + 2x^2 + 1),$$

ou

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0.$$

Esta equação foi construída de modo que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ fosse uma de suas raízes. Mas as únicas possíveis raízes racionais desta equação são inteiros, divisores de -23. Portanto as únicas possíveis raízes racionais são $+1$, -1, $+23$ e -23, e estes não são raízes, como se pode ver através de uma substituição direta:

$+1$: $1^6 - 9(1)^4 - 4(1)^3 + 23(1)^2 - 36(1) - 23 = 0$ (Falso!)

-1: $(-1)^6 - 9(-1)^4 - 4(-1)^3 + 27(-1)^2 - 36(-1) - 23 = 0$ (Falso!)

23: $(23)^6 - 9(23)^4 - 4(23)^3 + 27(23)^2 - 36(23) - 23 = 0$

(Falso, porque, por exemplo, $(23)^6$ é grande demais para ser anulado pelos outros termos!)

-23: $(-23)^6 - 9(-23)^4 - 4(-23)^3 + 27(-23)^2 - 36(-23) - 23 = 0$ (Falso!)

Portanto não existem raízes racionais e, daí $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional.

Como no exemplo anterior, não é necessário testar se +1, -1, +23 e -23 são raízes da equação. Em seu lugar, podemos argumentar que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é diferente de qualquer uma destas possíveis raízes racionais. Observemos que $\sqrt[3]{2}$ está na vizinhança de 1,2 e $\sqrt{3}$, na vizinhança de 1,7. Conseqüentemente, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é aproximadamente 0,5 e, portanto, não é igual a nenhum dos valores +1, -1, +23 ou -23. Segue-se que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional, por ser diferente de todas as possíveis raízes racionais.

Problemas - Lista 14

1. Demonstre que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ é irracional.
2. Demonstre que $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$ é irracional.

4.5 UM RESUMO

Neste capítulo tratamos das chamadas "irracionalidades algébricas". Vimos que existe uma infinidade de números irracionais e estudamos meios de construir alguns deles a partir de um número irracional dado.

Encontramos, também, o seguinte método para testar se um dado número k é irracional:

Inicialmente procuramos uma equação polinomial

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

satisfeita pelo valor $x = k$. (Se não conseguirmos encontrar uma tal equação, não poderemos aplicar este método.)

Em seguida, aplicamos o Teorema 4.3, ou, se $c_n = 1$, o Corolário 1. Muitas vezes é evidente que a equação não possui nenhuma raiz racional. Então, obviamente, k é uma raiz irracional. Outras vezes, de relance, vemos que o número k é diferente de todas as possíveis raízes racionais da equação e, assim, podemos concluir ser k irracional. Ou então, por substituição direta, selecionamos, dentre todos os possíveis candidatos, aqueles números racionais que realmente são raízes da equação. Depois, para provar que o número k é irracional, basta mostrar que ele é diferente de todas as raízes racionais.

No próximo capítulo vamos usar os métodos aqui desenvolvidos para demonstrar que muitos números trigonométricos são irracionais e usaremos o Teorema Fundamental da Aritmética para demonstrar que muitos números logarítmicos são irracionais. Além do mais, veremos que existem números irracionais que não são raízes de equações algébricas.

CAPÍTULO 5

NÚMEROS TRIGONOMÉTRICOS E LOGARÍTMICOS

Certamente o leitor estará familiarizado com funções trigonométricas como $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, e sabe que estas funções associam um número real a cada ângulo θ. Provavelmente também já terá encontrado a função logarítmica, $\log x$, que associa um número real a todo número real positivo x.

Os valores das funções trigonométricas são irracionais, exceto para alguns valores especiais do ângulo θ *; analogamente, para quase todos os números reais positivos x, os valores de $\log x$ são irracionais.

5.1 VALORES IRRACIONAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Usando os métodos do capítulo anterior e algumas identidades trigonométricas fundamentais, mostraremos que para muitos ângulos θ os valores correspondentes das funções trigonométricas são irracionais.

---

* Numa tábua, os valores irracionais das funções trigonométricas, por terem representação decimal infinita, estão truncados em algum ponto. Em outras palavras, as tábuas trazem valores aproximados destes números irracionais.

Para este fim, recordemos, inicialmente, as seguintes fórmulas trigonométricas:

(1) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$,

(2) $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$.

Substituindo A e B por um único valor, digamos θ, obtemos

(3) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$,

(4) $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

Em seguida, substituindo A por 2θ e B por θ, em (1), obtemos

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta.$$

Usando (3) e (4) e a bem conhecida identidade: $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta - (2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta,\\ &= \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta,\\ &= \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

ou

(5) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Consideremos, agora, o número $\cos 20^\circ$. Fazendo $\theta = 20^\circ$ em (5), temos

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ.$$

Se escrevermos x no lugar de $\cos 20^\circ$ e usarmos o fato de que

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$

ou

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{6}$$

Pela construção da eq. (6), sabemos que uma de suas raízes é $\cos 20^\circ$. Aplicando à eq. (6) o Teorema 4.3, vemos que as únicas possíveis raízes racionais desta equação são ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$ e $\pm\frac{1}{8}$. Mas, nenhum destes oito números é uma raiz da equação, como pode ser verificado por substituição. Concluímos, assim, que a eq. (6) não tem raízes racionais e portanto, $\cos 20^\circ$ é um número irracional.

Pode-se chegar a esta conclusão sem testar se ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$ e $\pm\frac{1}{8}$ são realmente raízes da eq. (6). Basta mostrar que $\cos 20^\circ$ é diferente de todos estes oitos valores. Isto pode ser feito, procurando o valor de $\cos 20^\circ$ numa tábua de funções trigonométricas. (Estas tábuas dão apenas um valor aproximado, é claro.) Ou então, podemos observar que $\cos 20^\circ$ está entre $\cos 0^\circ$ e $\cos 30^\circ$, sendo o cosseno uma função decrescente para estes ângulos. Vemos assim que $\cos 20^\circ$ está entre 1 e $\sqrt{3}/2$, isto é, entre 1 e 0,8. Segue-se, então, que $\cos 20^\circ$ não pode ser igual a nenhuma das possíveis raízes racionais da eq. (6) e, portanto, $\cos 20^\circ$ é um número irracional.

Exemplo. Prove que $\operatorname{sen} 10^\circ$ é irracional.

Primeira Solução. Uma maneira de resolver este problema é começar com a identidade trigonométrica para $\operatorname{sen} 3\theta$, isto é,

$$\operatorname{sen}3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta, \tag{7}$$

que pode ser obtida de (2), do mesmo modo que (5) foi obtido de (1). Substituindo θ por 10° em (7) e lembrando que $\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 3\operatorname{sen}10^\circ - 4\operatorname{sen}^3 10^\circ.$$

Colocando x no lugar de $\operatorname{sen} 10^\circ$, vem:

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3, \quad 8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Assim como no caso da eq. (6), não é difícil mostrar (usando o Teorema 4.3) que a equação $8x^3 - 6x + 1 = 0$ não possui raízes racionais. Portanto, $\operatorname{sen} 10^\circ$ é irracional.

Segunda Solução. A eq. (3) tem duas formas alternativas:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \qquad \cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta, \tag{8}$$

podendo ambas serem obtidas de (1), usando a identidade fundamental

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Se, na segunda alternativa em (8), substituirmos θ por 10°, obtemos

(9) $$\cos 20^\circ = 1 - 2\,\text{sen}^2 10^\circ.$$

Suponhamos agora que $\text{sen}\,10^\circ$ fosse racional. Então $\text{sen}^2 10^\circ$ e $1 - 2\,\text{sen}^2 10^\circ$ seriam, ambos, racionais. Mas, como já foi demonstrado, $\cos 20^\circ$ é irracional. Temos então uma contradição e, portanto, $\text{sen}\,10^\circ$ é irracional.

Problemas - Lista 15

Ao resolver estes problemas, use (sempre que ajudar) qualquer resultado anterior, quer do texto, quer dos problemas em si.

1. Prove que os seguintes números são irracionais:

   (a) $\cos 40^\circ$ (b) $\text{sen}\,20^\circ$ (c) $\cos 10^\circ$ (d) $\text{sen}\,50^\circ$.

2. Demonstre a identidade (7).

3. (a) Demonstre a identidade $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

   (b) Prove que $\cos 12^\circ$ é irracional.

4. Quais dos seguintes números são racionais?

   (a) $\text{sen}\,0^\circ$ (d) $\text{sen}\,30^\circ$ (g) $\text{sen}\,45^\circ$ (j) $\text{sen}\,60^\circ$

   (b) $\cos 0^\circ$ (e) $\cos 30^\circ$ (h) $\cos 45^\circ$ (k) $\cos 60^\circ$

   (c) $\text{tg}\,0^\circ$ (f) $\text{tg}\,30^\circ$ (i) $\text{tg}\,45^\circ$ (l) $\text{tg}\,60^\circ$

5.2 UM PROCESSO EM CADEIA

Os métodos usados na Secção 5.1 podem ser estendidos para demonstrar que, com algumas poucas e óbvias exceções, as funções trigonométricas de qualquer ângulo igual a um número inteiro de graus, minutos e segundos, são irracionais. Estamos falando de ângulos como $14^\circ 41' 13''$. Exceções aparecem no caso dos ângulos de 0°, 30°, 45°, 60° e para ângulos obtidos a partir destes pela adição ou subtração de múltiplos inteiros de 90°. Isto não quer dizer que todas as funções trigonométricas de 30°, por exemplo, sejam racionais, mas, pelo menos uma função trigonométrica de 30° é racional.

Não vamos demonstrar estas afirmações na sua mais ampla generalidade, porque as equações que surgem para números como $\cos 14^\circ 41' 13''$ são demasiadamente complexas para serem analisadas aqui. No entanto, existe um princípio simples que nos permite avançar bastante, a saber:

Se θ for um ângulo tal que $\cos 2\theta$ é irracional, então $\cos\theta$, $\text{sen}\,\theta$ e $\text{tg}\,\theta$ também serão irracionais.

Para demonstrar este princípio, usaremos, inicialmente, a eq. (8). Suponhamos que $\cos\theta$ fosse racional. Então $\cos^2\theta$ e $2\cos^2\theta - 1$ também seriam racionais. Mas, $2\cos^2\theta - 1$ é $\cos 2\theta$, que é irracional.

Analogamente, suponhamos $\text{sen}\,\theta$ racional. Então $\text{sen}^2\theta$ seria racional, bem como $1 - 2\text{sen}^2\theta$. Mas, esta última expressão é novamente igual a $\cos 2\theta$.

Finalmente, suponhamos que $\operatorname{tg}\theta$ fosse racional. Então $\operatorname{tg}^2\theta$ seria racional e poderíamos usar a bem conhecida identidade trigonométrica:

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

para ver que $\cos^2\theta$ seria racional. Mas, novamente, da eq. (8) concluiríamos que $\cos 2\theta$ é racional, obtendo assim uma contradição. Portanto $\operatorname{tg}\theta$ tem que ser irracional.

Com repetidas aplicações do princípio que acabamos de demonstrar, podemos provar que uma infinidade de números trigonométricos são irracionais. Por exemplo, porque $\cos 20^\circ$ é irracional, podemos concluir que

$\cos 10^\circ$	$\operatorname{sen} 10^\circ$	$\operatorname{tg} 10^\circ$
$\cos 5^\circ$	$\operatorname{sen} 5^\circ$	$\operatorname{tg} 5^\circ$
$\cos 2^\circ 30'$	$\operatorname{sen} 2^\circ 30'$	$\operatorname{tg} 2^\circ 30'$
$\cos 1^\circ 15'$	$\operatorname{sen} 1^\circ 15'$	$\operatorname{tg} 1^\circ 15'$
$\cos 37'30''$	$\operatorname{sen} 37'30''$	$\operatorname{tg} 37'30''$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

são irracionais.

Problemas - Lista 16

1. Demonstre que os seguintes números são irracionais:

   (a) $\cos 15^\circ$, $\operatorname{sen} 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$,

   (b) $\cos 7^\circ 30'$, $\operatorname{sen} 7^\circ 30'$, $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$,

   (c) $\cos 22^\circ 30'$, $\operatorname{sen} 22^\circ 30'$, $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$,

   *(d) $\cos 35^\circ$, $\operatorname{sen} 35^\circ$, $\operatorname{tg} 35^\circ$,

   *(e) $\cos 25^\circ$, $\operatorname{sen} 25^\circ$, $\operatorname{tg} 25^\circ$.

2. Demonstre que $14^\circ 41'13''$ é igual a um número racional multiplicado por 90, isto é, demonstre que $14^\circ 41'13''$ é um múltiplo racional de 90.

3. (a) Prove: se $\cos\theta$ for racional, então $\cos 3\theta$ também será racional.

   (b) Isto é equivalente a provar: "se $\cos 3\theta$ for irracional, então $\cos\theta$ será irracional"?

4. Prove: se $\operatorname{sen} 3\theta$ for irracional, então $\operatorname{sen}\theta$ será irracional.

5.3 VALORES IRRACIONAIS DOS LOGARITMOS DECIMAIS

Todos os logaritmos, neste livro, serão logaritmos na base 10, de modo que não será necessário especificar a base cada vez. Recordemos que, dado um número real y, seu logaritmo na base 10 é, por definição, um número k, tal que $10^k = y$. Assim, para qualquer $y > 0$,

$$\log y = k$$

e

$$10^k = y$$

são afirmações equivalentes. Todas as demonstrações serão baseadas no Teorema Fundamental da Aritmética, demonstrado no Apêndice B, que trata da decomposição única de inteiros em fatores primos.

Exemplo 1. Prove que $\log 2$ é irracional.

Solução. Suponhamos, ao contrário, que $\log 2 = a/b$, onde a e b são inteiros positivos. É razoável supor a e b positivos, pois $\log 2$ é positivo. Esta equação significa que

$$2 = 10^{a/b}.$$

Elevando ambos os membros à potência b, obtemos

$$2^b = 10^a = 2^a 5^a.$$

Esta é uma igualdade de inteiros positivos e portanto podemos aplicar o Teorema Fundamental da Aritmética. De fato, o Teorema Fundamental garante que esta igualdade não pode ser verdadeira porque, qualquer que seja o valor de b, 2^b é um inteiro não divisível por 5, enquanto que $2^a 5^a$ é divisível por 5, por ser a um inteiro positivo. Portanto $\log 2$ é irracional.

Exemplo 2. Prove que $\log 21$ é irracional.

Solução. Suponhamos, ao contrário, que existam inteiros positivos a e b, tais que

$$\log 21 = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad 21 = 10^{a/b}.$$

Elevando ambos os membros à potência b, obtemos

$$21^b = 10^a.$$

Mas esta igualdade não pode ser verdadeira pois 21^b só tem os fatores primos 3 e 7 enquanto que 10^a só tem os fatores primos 2 e 5.

Exemplo 3. Sejam c e d dois inteiros não-negativos distintos. Demonstre que $\log(2^c 5^d)$ é irracional.

Solução. Usaremos, novamente, um argumento indireto. Por causa das condições impostas sobre c e d, sabemos que $2^c 5^d$ é maior do que 1, de modo que $\log(2^c 5^d)$ é positivo. Suponhamos que

$$\log(2^c 5^d) = \frac{a}{b},$$

onde a e b são inteiros positivos. Sabemos, então, que

$$2^c 5^d = 10^{a/b}.$$

Elevando ambos os membros à potência b, obtemos

$$2^{bc}5^{bd} = 10^a = 2^a5^a.$$

De acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética, esta igualdade se verifica somente se $bc = a$ e $bd = a$, isto é, se $bc = bd$. Mas, como c e d são inteiros distintos, também bc e bd são distintos. Assim, $\log(2^c5^d)$ é irracional.

Problemas - Lista 17

1. Demonstre que $\log 3/2$ é irracional.
2. Demonstre que $\log 15$ é irracional.
3. Demonstre que $\log 5 + \log 3$ é irracional.

*4. Demonstre que os inteiros 1, 2, 3,...,1000 podem ser divididos em três classes distintas e disjuntas:

Classe A: os inteiros 1, 10, 100, 1000;
Classe B: os inteiros da forma 2^c5^d, com c e d distintos;
Classe C: os inteiros divisíveis por um primo ímpar p, com p diferente de 5;

e que $\log n$ é racional se, e somente se, n estiver na Classe A.

5.4 NÚMEROS TRANSCENDENTES

Além da classificação dos números reais em racionais e irracionais, existe uma outra separação: em algébricos e transcendentes. Se um número real satisfizer alguma equação da forma

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros, dizemos que ele é um *número algébrico*. Se um número real não satisfizer nenhuma equação deste tipo, dizemos que ele é um *número transcendente*. (Números complexos são divididos em algébricos e transcendentes exatamente da mesma maneira, mas vamos restringir nossa atenção aos números reais.)

É fácil ver que todo número racional é um número algébrico. Por exemplo, 5/7 satisfaz a equação $7x - 5 = 0$ e esta equação é do tipo prescrito. De um modo geral, qualquer número racional a/b satisfaz a equação $bx - a = 0$ e, portanto, é um número algébrico.

Uma vez que todo número racional é algébrico, segue-se que todo número não algébrico é não racional (veja o item (12) em "Doze Maneiras de Formular 'Se A, então B'", p. 40) ou, enunciado mais convencionalmente, *todo número transcendente é irracional*. Podemos ilustrar isto, esquematicamente, como na Fig. 15.

Números Reais
- Racionais (Todos estes são números algébricos.)
- Irracionais
  - Algébricos, por ex. $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{7}$
  - Transcendentes, p.ex. $2^{\sqrt{2}}$, log2 e π

Números Reais
- Algébricos
  - Racionais
  - Irracionais
- Transcendentes (Todos estes são números irracionais.)

Figura 15.

Na figura, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{7}$ aparecem como exemplos de números algébricos. Eles são algébricos por satisfazerem as equações algébricas

$$x^2 - 2 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - 7 = 0$$

respectivamente. Por outro lado, os números log 2 e π aparecem como exemplos de números transcendentes. (O número π, de valor 3,14159..., é a razão entre o comprimento de qualquer circunferência e seu diâmetro.) Não podemos provar, aqui, que estes números são transcendentes, porque uma tal demonstração envolve métodos muito mais profundos do que os que estamos usando. Desde 1882 sabe-se que π é transcendente, mas a transcendência de $2^{\sqrt{2}}$ e de log 2 são resultados bem mais recentes, conhecidos somente desde 1934. O número $2^{\sqrt{2}}$ foi usado como exemplo específico, pelo grande matemático David Hilbert, quando, em 1900 apresentou uma famosa lista de vinte e três problemas que, a seu ver, eram os mais destacados problemas matemáticos ainda em aberto. Especificamente, o sétimo problema de Hilbert consistia em decidir se α^β é algébrico ou transcendente, dado que α e β são números algébricos. (Os casos $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e β racional foram excluídos pois, nestes casos, é bastante simples provar que α^β é algébrico.) Em 1934, A. Gelfond e, independentemente, Th. Schneider, provaram que α^β é transcendente. A transcendência de $2^{\sqrt{2}}$ é, claramente, um caso específico deste resultado geral. Uma outra conseqüência específica é a transcendência de log 2, pois se designarmos log 2 por β e 10 por α, então, pela definição de logaritmo decimal,

$$10^{\log 2} = \alpha^\beta = 2.$$

Se β fosse algébrico e irracional, pelo Teorema de Gelfond-Schneider, 2 seria transcendente. Mas 2 não é transcendente, portanto $\beta = \log 2$ é racional ou transcendente. Já vimos que log 2 não é racional. Portanto, é transcendente.

Generalizando, o Teorema de Gelfond-Schneider estabelece a transcendência de $\log r$, desde que r seja racional e $\log r$ irracional. Pelo que acabamos de provar na Secção 5.3 (veja também o Problema 4 da Lista 17), isto nos diz que $\log r$ é transcendente desde que r seja um número racional positivo, diferente de

$$\ldots, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, 10^{4}, 10^{5}, \ldots.$$

Devemos não esquecer que todos os logaritmos mencionados neste livro são logaritmos decimais, isto é, logaritmos na base 10.

Portanto, os números $\log n$ são *transcendentes* se n for qualquer inteiro entre 1 e 1000, exceto $n = 1$, $n = 10$, $n = 100$ e $n = 1000$. Por outro lado, números trigonométricos como $\cos 20^\circ$, que são irracionais, como foi provado no início deste capítulo, são números *algébricos*. O resultado geral é o seguinte: seja r um número racional qualquer e seja $(90r)^\circ$ o ângulo obtido, multiplicando 90° por r. Então

$$\text{sen}(90r)^\circ, \quad \cos(90r)^\circ \quad \text{e} \quad \text{tg}(90r)^\circ$$

são números algébricos. (A única qualificação que deve ser acrescentada a esta setença ocorre no caso de $tg(90r)^{o}$, onde o número racional r poderá assumir apenas valores para os quais esta função trigonométrica exista como número real. Por exemplo, $r = 1$ não é um valor admissível, porque $tg\ 90^{o}$ não é um número real).

Dissemos, acima, que π é um número transcendente. Isto implica que π é um número irracional e, apesar de ser mais fácil provar que π é irracional do que provar que é transcendente, mesmo esta demonstração está além do escopo deste livro.

Problemas - Lista 18

1. Demonstre que os seguintes números são algébricos:

   (a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt[3]{5}$, (c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, (d) $\cos 20^{o}$, (e) $\operatorname{sen} 10^{o}$.

*2. Supondo que π seja um número transcendente, demonstre que 2π é um número transcendente.

5.5 TRÊS PROBLEMAS FAMOSOS DE CONSTRUÇÃO

A teoria dos números algébricos e transcendentes possibilitou aos matemáticos resolver três problemas geométricos, bem conhecidos, que provinham da antigüidade. Estes três problemas, conhecidos sob os nomes de "duplicação do cubo", "trisecção de um ângulo" e "quadratura do círculo", consistem em efetuar as seguintes construções, usando apenas régua e compasso*:

(1) "Duplicar o cubo" significa construir um cubo de volume igual ao dobro do volume de um cubo dado. Apesar de o cubo ser uma figura da geometria do espaço, o problema é, realmente, de geometria plana, pois, se tomarmos como unidade de comprimento a aresta do cubo dado (Fig. 16), o problema se reduz à construção de um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$, porque este seria o comprimento da aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume do cubo dado.

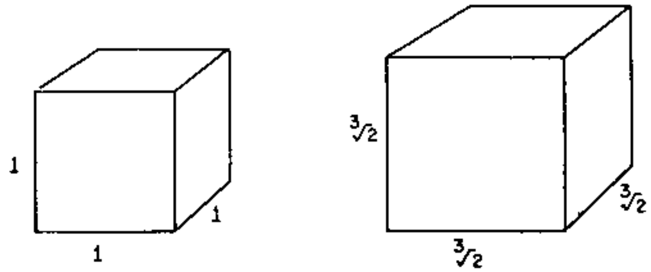


Figura 16

(2) "Trisectar um ângulo" significa descobrir um processo, usando apenas régua e compasso, para dividir *qualquer* ângulo em três partes iguais. Existem ângulos especiais, como por exemplo os de 45^{o} e 90^{o}, que podem ser trisectados com o uso apenas de régua e compasso; mas, o assim chamado, ângulo "geral" não pode ser dividido em três ângulos iguais com os instrumentos permitidos.

---

*N.T. "régua", neste contexto, significa "régua sem escala". Ver "Episódios da História Antiga da Matemática", pg. 104 Coleção Fundamentos da Matemática Elementar - SBM

(3) "Quadratura do círculo" significa construir um quadrado cuja área seja igual à de um círculo dado ou, de modo equivalente, construir um círculo de área igual à de um quadrado dado.

Sabe-se agora que tais construções são impossíveis; isto é, elas não podem ser efetuadas pelos métodos de construção da Geometria Euclidiana, usando apenas régua e compasso. Muitos amadores continuam tentando encontrar soluções para estes problemas, não sabendo que seus esforços serão vãos. Apesar de estes amadores estarem cientes de que nenhum matemático conseguiu efetuar estas construções, aparentemente eles não sabem que a impossibilidade de tais construções já foi demonstrada. O que muitos dos matemáticos amadores conseguem, de tempo em tempo, é uma solução *aproximada* de um destes problemas, mas nunca uma solução exata. A distinção aqui é clara: o problema da duplicação do cubo, por exemplo, consiste em descrever uma construção, com instrumentos de desenho teoricamente perfeitos, de um segmento, não de comprimento quase igual a $\sqrt[3]{2}$, mas sim, exatamente igual a $\sqrt[3]{2}$. Não será solução do problema, por exemplo, a construção de um segmento de comprimento $10(8 - \sqrt{62})$, apesar de os números $10(8 - \sqrt{62})$ e $\sqrt[3]{2}$ coincidirem até a sexta casa decimal.

Um mal-entendido especial ocorre no caso do problema da trisecção de um ângulo. *É* possível trisectar qualquer ângulo se for permitido fazer marcas na régua. Deste modo, só podemos falar da impossibilidade da trisecção de um ângulo geral, entendendo

do que os processos de construção permitem apenas o uso do compasso e de uma régua *sem marcas*.

Por causa da considerável confusão que cerca estes três problemas clássicos, daremos agora uma noção, a grosso modo, de como demonstrar a impossibilidade destas construções. Não poderemos dar demonstrações completas porque os detalhes se tornam bastante técnicos. Mesmo assim, esperamos tornar o assunto plausível. Se algum leitor quiser se aprofundar, existe uma exposição completa da trisecção do ângulo e da duplicação do cubo no livro de R. Courant e H. Robbins, "O que é Matemática?* A demonstração da impossibilidade da quadratura de um círculo é muito mais difícil do que as outras duas demonstrações.

Como é possível demonstrar a impossibilidade destas construções? O primeiro passo é obter alguma noção sobre que comprimentos podem ser construídos com régua e compasso, a partir de um comprimento unitário dado. Afirmamos, sem demonstrar (quem estiver familiarizado com construções geométricas perceberá que a afirmação é razoável) que, dentre os comprimentos que poder ser construídos, estão sucessões de raízes quadradas aplicadas a números racionais, como por exemplo,

(10) $$\sqrt{2},\quad \sqrt{1+\sqrt{2}},\quad \sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}},\quad \sqrt{1+\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$$

*N.T. A ser lançado, brevemente em Português pela SBM em co-edição com o CNPq e a Editora da Universidade de Brasília.

Estes números são todos algébricos. Os quatro números acima são raízes, respectivamente, das equações

(11) $$x^2 - 2 = 0,$$

(12) $$x^4 - 2x^2 - 1 = 0,$$

(13) $$x^8 - 20x^6 + 132x^4 - 320x^2 + 94 = 0,$$

(14) $$x^{16} - 8x^{14} + 8x^{12} + 64x^{10} - 98x^8 - 184x^6 + 200x^4 + 224x^2 - 113 = 0.$$

Escolhamos uma delas, digamos (13), e verifiquemos a afirmação acima. Começamos com

$$x = \sqrt{5 - 3\sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$x^2 = 5 - 3\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Mudando um termo de membro e, novamente, elevando ao quadrado, obtemos

$$x^2 - 5 = -3\sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 9 + 9\sqrt{2},$$

$$x^4 - 10x^2 + 16 = 9\sqrt{2}.$$

E, elevando novamente ao quadrado ambos os membros, chegamos a (13).

Não apenas são os números (10) raízes das equações (11) a (14), mas nenhum desses números é raiz de alguma equação, com coeficientes inteiros, de menor grau. Consideremos o número $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, por exemplo. Ele satisfaz a eq. (12) de grau 4, mas não satisfaz nenhuma equação de grau 3, 2 ou 1, com coeficientes inteiros. (Não vamos provar esta afirmação.) Sempre que um número algébrico for raiz de uma equação de grau n, com coeficientes inteiros, mas não for raiz de nenhuma equação de grau menor, com coeficientes inteiros, dizemos tratar-se de um *número algébrico de grau* n. Assim, os números (10) são números algébricos de graus 2, 4, 8 e 16, respectivamente. Isto sugere o seguinte fato básico sobre comprimentos que podem ser construídos pelos métodos da Geometria Euclidiana:

TEOREMA SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS. *Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8, ..., isto é, um número algébrico de grau igual a uma potência de 2.*

Se o leitor aceitar a validade deste resultado, poderemos mostrar porque as três famosas construções são impossíveis.*

---

* O leitor deverá lembrar (veja pg.40 (12)) que este teorema implica o seguinte: Números algébricos de grau m, onde m não é uma potência de 2, *não* são construtíveis com régua e compasso; também números transcendentes não são construtíveis com régua e compasso.

Comecemos com a duplicação do cubo. Como vimos, ao enunciar o problema, trata-se de construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ a partir de um segmento unitário. Mas será que $\sqrt[3]{2}$ é um comprimento construtível? Ele satisfaz a equação

$$x^3 - 2 = 0 \tag{15}$$

e isto sugere ser $\sqrt[3]{2}$ um número algébrico de grau 3. De fato isto é assim e para a demonstração basta verificar que $\sqrt[3]{2}$ não satisfaz nenhuma equação de grau 1 ou 2, com coeficientes inteiros. Apesar de a demonstração não ser difícil, ela é um pouco artificiosa e vamos deixá-la para a próxima secção.

Sendo $\sqrt[3]{2}$ um número algébrico de grau 3, pelo Teorema Sobre Construções Geométricas, enunciado acima, ele não será construtível. Daí concluímos ser impossível duplicar o cubo.

Consideremos, a seguir, o problema da trisecção de um ângulo. Para mostrar que a trisecção é impossível, basta mostrar que um certo ângulo específico não pode ser trisectado com o uso somente da régua e compasso. O ângulo específico que vamos considerar é o de 60°. Trisectar um ângulo de 60° significa construir um ângulo de 20°, o que, por sua vez, consiste em construir, a partir de um dado segmento unitário, um segmento de comprimento igual a $\cos 20^\circ$. Para ver isto, consideremos um triângulo de base 1, cujos ângulos da base sejam 60° e 90°, como na Fig. 17. Temos, assim, um triângulo ABC, com base $AB = 1$, ângulo $BAC = 60^\circ$, ângulo $ABC = 90^\circ$. No lado BC escolhemos o ponto

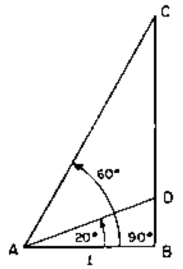


Figura 17

D tal que o ângulo $BAD = 20^\circ$. Da trigonometria elementar, sabemos que

$$AD = \frac{AD}{1} = \frac{AD}{AB} = \sec 20^\circ.$$

Portanto, a trisecção de um ângulo de 60° se resume na construção de um segmento de comprimento igual a $\sec 20^\circ$; o que, por sua vez, equivale a construir um segmento de comprimento $\cos 20^\circ$ porque $\cos 20^\circ$ e $\sec 20^\circ$ são recíprocos um do outro e sabe-se bem que se um segmento for construtível, o segmento de comprimento recíproco também o será.

Então a questão passa a ser: Pode-se construir um segmento de comprimento $\cos 20^\circ$ a partir de um segmento dado de comprimento 1? Sabemos, da eq. (6), que $\cos 20^\circ$ é raiz de uma equação cúbica, isto é, de uma equação de grau 3. Além do que, afirmamos (sem demonstrar, pois trata-se de um resultado mais profundo) que $\cos 20^\circ$ não satisfaz nenhuma equação de grau 1 ou 2, com coeficientes inteiros. Portanto, $\cos 20^\circ$, como $\sqrt[3]{2}$, é um número algébrico de grau 3 e pelo Teorema Sobre Construções Geometrícas, $\cos 20^\circ$ não é construtível. Assim, a trisecção de um ângulo de

60^{o}, com régua e compasso, é impossível.

Finalmente, consideremos o problema da quadratura do círculo. Dado um círculo qualquer, podemos considerar seu raio como unidade de comprimento. Com essa unidade, a área do círculo será π unidades de área. Um quadrado de mesmo tamanho teria lado de comprimento $\sqrt{\pi}$. Portanto o problema da quadratura do círculo consiste em construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ a partir de um comprimento unitário dado. Na teoria das construções geométricas é bem conhecido que se pode construir um segmento de comprimento a^2 a partir de segmentos de comprimentos 1 e a. Portanto, se fosse possível construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ também seria possível construir um segmento de comprimento π.

Mas, na secção anterior afirmamos que π é um número transcendente, isto é, π não é um número algébrico. O Teorema Sobre Construções Geométricas diz ser impossível a construção de um segmento de comprimento π. Portanto, a construção necessária para a "quadratura do círculo" é impossível.

Problemas - Lista 19

(Os problemas 2 e 3 se destinam a estudantes com conhecimento de construções geométricas.)

1. Demonstre que os primeiro, segundo e quarto números da lista (10) são raízes, respectivamente, das equações (11), (12) e (14).

2. Demonstre que, dados segmentos de comprimentos 1 e sen 20^{o}, é possível construir, com régua e compasso, um segmento de comprimento cos 20^{o}.

3. Demonstre que, dados segmentos de comprimentos 1 e tg 20^{o} é possível construir, usando régua e compasso, um segmento de comprimento cos 20^{o}.

5.6 CONTINUANDO A ANÁLISE DE $\sqrt[3]{2}$

Na secção anterior afirmamos que $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico de grau 3. Isto é, $\sqrt[3]{2}$ é uma raiz da equação $x^3 - 2 = 0$, mas não é raiz de nenhuma equação de grau 1 ou 2, com coeficientes inteiros. Vamos agora demonstrar esta afirmação.

Para mostrar que $\sqrt[3]{2}$ não é raiz de nenhuma equação de grau 1, com coeficientes inteiros, precisamos mostrar que não existem inteiros a e b, com a diferente de zero, tais que

$$a\sqrt[3]{2} + b = 0.$$

Se tais inteiros existissem, teríamos $\sqrt[3]{2} = -b/a$, de modo que $\sqrt[3]{2}$ seria um número racional. Mas sabemos que $\sqrt[3]{2}$ é irracional pelo Corolário 2 da Secção 4.3.

É mais difícil demonstrar que $\sqrt[3]{2}$ não é raiz de nenhuma equação de 2º grau, com coeficientes inteiros, tais como

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Vamos supor que $\sqrt[3]{2}$ seja raiz de uma tal equação e chegaremos a uma contradição. Suponhamos, então, que

$$a(\sqrt[3]{2})^2 + b\sqrt[3]{2} + c = 0,$$

isto é

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -c.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando, obtemos

$$b^2\sqrt[3]{4} + 2a^2\sqrt[3]{2} = c^2 - 4ab.$$

Podemos considerar as duas últimas equações como formando um sistema linear nas quantidades $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt[3]{2}$. Este sistema terá uma solução única ou não terá uma solução única, dependendo de os pares de coeficientes a, b e b^2, $2a^2$ não serem, ou serem, proporcionais.

Se a solução for única, eliminando, por exemplo, $\sqrt[3]{4}$, obtemos

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4a^2b - ac^2 - b^2c}{b^3 - 2a^3}.$$

Mas, $\sqrt[3]{2}$ é irracional e assim chegamos a uma contradição.

A outra possibilidade é a de os pares de coeficientes serem proporcionais. Isto significa que

$$\frac{a}{b} = \frac{b^2}{2a^2}, \quad 2 = \frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3, \quad \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a}.$$

Novamente chegamos a uma contradição e assim podemos concluir que $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico de grau 3.

Problemas - Lista 20

1. Demonstre que $\sqrt{2}$ é um número algébrico de grau 2.
2. Demonstre que $\sqrt[3]{3}$ é um número algébrico de grau 3.

5.7 UM RESUMO

Neste capítulo aplicamos métodos, anteriormente desenvolvidos, para mostrar que funções trigonométricas e logaritmos decimais têm valores irracionais na maioria dos casos constantes nas tábuas elementares. Em seguida, dividimos os números reais em duas novas classes, os números algébricos e os transcendentes, e vimos a relação entre estas classes e a separação dos números reais em racionais e irracionais, feita anteriormente. Sem demonstração, vimos que, se um comprimento puder ser construído com régua e compasso, a partir de um segmento unitário dado, então este comprimento será um número algébrico de grau 2^k, onde k é um inteiro não negativo. (Um leitor, bem familiarizado com Geometria Analítica, poderá se convencer da validade deste teorema a respeito de construções geométricas, analisando o significado algébrico das operações que podem ser feitas com régua e compasso. Os três casos são os de uma reta interceptando uma reta, uma reta interceptando uma circunferência e uma circunferência interceptando uma circunferência.) Tendo eliminado a possibilidade de se construir segmentos de comprimento igual a um número algébrico de grau 3, vimos que o cubo não pode ser duplicado, nem um ângulo trisectado, pelos métodos prescritos. Por ser impossível a construção de um segmento de comprimento igual a um número transcendente, vimos que o problema da quadratura do círculo também ficou resolvido: a construção é impossível.

CAPÍTULO 6

A APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Este capítulo trata do grau de precisão com que um número irracional é aproximado por números racionais. Veremos que é possível obter números racionais tão próximos, por exemplo, de $\sqrt{2}$ quanto se deseje. Existem números racionais a/b que diferem de $\sqrt{2}$ por menos de 10^{-10}, ou 10^{-20}, ou por menos de números tão pequenos quanto se deseje especificar. E isto é verdade para qualquer número irracional, não apenas para $\sqrt{2}$.

Mas para encontrar um número racional a/b que difira de um número irracional por menos de 10^{-20}, precisamos procurar um a/b com denominador b muito grande. Se permitirmos que b seja da ordem de 10^{20}, poderemos encontrar uma fração a/b satisfazendo as exigências. O que acontece se restringirmos os valores de b, não permitindo que eles ultrapassem 10^{15} ou 10^{10}? O problema torna-se mais difícil e trabalhoso. Examinando questões como estas, estaremos nos preocupando com o que pode ser afirmado a respeito de *todos* os números irracionais e não somente a respeito de alguns casos especiais como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Para falarmos da aproximação de um número por outro, precisamos ter à disposição a linguagem e notação das desigualdades. É, portanto, com este tópico que vamos começar.

6.1 DESIGUALDADES

Escrevemos $u > v$ sempre que u for maior do que v e isto significa que $u-v$ é positivo. Sempre que u for maior do que v segue-se que v é menor do que u, o que, em notação matemática, se escreve: $v < u$. Conseqüentemente, as quatro desigualdades

$$u > v, \quad u-v > 0, \quad v < u \quad \text{e} \quad v-u < 0$$

são simplesmente quatro maneiras de enunciar a mesma relação básica entre u e v. Analogamente, $u \geq v$ significa que u é maior do que ou igual a v e isto equivale a dizer que $u - v$ é positivo ou zero, mas não negativo.

Teorema 6.1

(a) *Se* $u > v$ *e* w *for um número qualquer, então* $u+w > v+w$.

(b) *Se* $u > v$ *e* w *for um número qualquer, então* $u-w > v-w$.

(c) *Se* $u > v$ *e* w *for um número positivo qualquer, então* $uw > vw$.

(d) *Se* $u > v$ *e* w *for um número positivo qualquer, então* $u/w > v/w$.

(e) *Se* $u > v$ *e se* u *e* v *forem positivos, então* $u^2 > v^2$, *mas* $1/u < 1/v$.

(f) *Se* $u > v$ *e* $v > w$, *então* $u > w$.

(g) *Todos estes resultados permanecem válidos se os sinais* $>$ *e* $<$, *em todos os ítens, forem substituídos por* $\geq$ *e* $\leq$.

Demonstração. Aceitaremos a validade de dois princípios: a soma e o produto de dois números positivos são positivos.

(a) É dado que $u-v$ é positivo e queremos provar que $(u+w) - (v+w)$ é positivo. Isto é claro porque

$$u - v = (u + w) - (v + w).$$

(b) Novamente é dado que $u-v$ é positivo e devemos provar que $(u-w) - (v-w)$ é positivo. Como acima, isto segue, porque

$$u - v = (u - w) - (v - w).$$

(c) É dado que $u-v$ e w são positivos e devemos provar que $uw-vw$ é positivo. Isto decorre dos seguintes fatos: $uw - vw = w(u - v)$ e o produto de dois números positivos é positivo.

(d) Isto realmente está contido na parte (c) pois, se w for positivo, $1/w$ também o será. Portanto, $1/w$ poderia ser usado como o multiplicador na parte (c) no lugar de w, assim: se $u > v$, então $u(1/w) > v(1/w)$.

(e) Como u e v são positivos, $u+v$ também é. Mas $u>v$ implica que $u-v$ também é positivo e, portanto, o produto $(u+v)(u-v)$ é positivo. Temos então

$$(u+v)(u-v) > 0, \quad u^2-v^2 > 0, \quad u^2 > v^2.$$

Por outro lado, se usarmos a parte (c) para justificar a multiplicação de ambos os termos da desigualdade $u > v$ por $1/uv$, obtemos

$$u.\frac{1}{uv} > v.\frac{1}{uv}$$

e portanto

$$\frac{1}{v} > \frac{1}{u} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u} < \frac{1}{v}.$$

(f) É dado que $u-v$ e $v-w$ são positivos e queremos provar que $u-w$ é positivo. Mas,

$$u - w = (u - v) + (v - w),$$

de modo que, mais uma vez, basta usar o princípio de que a soma de dois números positivos é positiva.

(g) Poderíamos provar a parte (g) percorrendo as partes (a), (b),...,(f) e fazendo uma nova análise em cada caso. Mas, há um jeito mais simples. As demonstrações das partes (a) até (f) se basearam no princípio de que a soma e o produto de dois números positivos são positivos. Mas, enquanto $u > v$ significa que $u-v$ é positivo, $u \geq v$ significa que $u-v$ é positivo ou zero, isto é, $u-v$ é não-negativo. Além do mais, a soma e o produto de dois números não-negativos quaisquer, são não-negativos. Baseado nisto, todas as demonstrações de (a) até (f) estender-se-ão, automaticamente, do caso $>$ para o caso $\geq$.

Se os números u e v forem colocados na reta real, como

explicado no Capítulo 3, a desigualdade $v < u$ significa que v está à esquerda de u ou u à direita de v (Fig. 18).

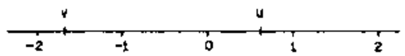


Figura 18. Ilustração de $v < u$

As desigualdades $w < v < u$ significam $w < v$ e $v < u$, de modo que v estará entre w e u (Fig. 19). Devemos explicar o uso da

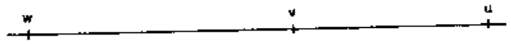


Figura 19. Ilustração de $w < v < u$

palavra "entre". Quando escrevemos $w < v < u$, queremos dizer que v está "estritamente entre" w e u e não pode coincidir nem com w, nem com u; mas, se dissermos "entre", ou escrevermos $w \leq v \leq u$, estaremos incluindo a possibilidade de v ser igual a w, ou igual a u. É possível que queiramos admitir apenas uma destas possibilidades, por exemplo, $w < v \leq u$ ou $w \leq v < u$. Os símbolos não deixam dúvidas quanto ao significado.

Problemas - Lista 21

1. Dado que $u^2 > v^2$ e que u e v são positivos, demonstre que $u > v$.

2. Dado que $r > s$, demonstre que $-r < -s$.

3. Demonstre que os termos de uma desigualdade podem mudar de

membro, desde que os sinais sejam mudados. Especificamente, demonstre que, se $a + b - c > d + e - f$, então $a - e + f > d - b + c$.

4. Dados os inteiros positivos n e k, tais que $n \leq k$, demonstre que

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{kn}$$

5. Determine se as seguintes sentenças são verdadeiras ou falsas:

(a) Se $r > s$, então $r^2 > s^2$.

(b) Se $r > s$ e c for um número qualquer, então $cr > cs$.

(c) Se $-1/2 < \lambda < 1/2$, então $-1 < \lambda < 1$.*

(d) Se $-1/2 < \lambda < 1/2$, então $-3/2 < \lambda < 3/2$.

(e) Se $0 < \lambda < 1/2$, então $-1/2 < \lambda < 1/2$.

(f) Se $-1/2 < \lambda < 1/2$, então $-1/3 < \lambda < 1/3$.

(g) Se $-1/2n < \lambda < 1/2n$, então $-1/n < \lambda < 1/n$.

6. Um certo número irracional λ está estritamente entre -10 e 10. Escreva isto em notação matemática.

7. Se w for negativo e $u > v$, demonstre que $uw < vw$.

---

* O símbolo λ é uma letra grega. Lê-se "lambda".

8. (a) Sejam u e v dois inteiros distintos quaisquer, escolhidos dentre 1, 2, 3,...,10. Demonstre que $-9 \leq u-v \leq 9$.

(b) Se em (a) não exigíssemos que os números inteiros u e v fossem distintos, ainda seria verdade que $-9 \leq u-v \leq 9$?

6.2. APROXIMAÇÃO POR INTEIROS

Se arredondarmos qualquer número real, substituindo-o pelo inteiro mais próximo, o erro cometido será no máximo igual a 1/2. Por exemplo, se substituirmos 6,3 por 6, ou 9,7 por 10, ou 7,5 por 7 ou 8, o erro não será, em cada caso, maior do que 1/2. Se substituirmos um número irracional pelo inteiro mais próximo, o erro será menor do que 1/2 e começaremos a teoria das aproximações com este caso simples.

Teorema 6.2. *Para qualquer número irracional* α, *existe um único inteiro* m, *tal que*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2} .$$

Demonstração. Escolhemos m como sendo o inteiro mais próximo de α. Por exemplo, se $\alpha = \sqrt{3} = 1,73...$, escolheremos $m = 2$, ou, se $\alpha = 2\sqrt{3} = 3,46...$, escolheremos $m = 3$. Assim, m poderá ser o inteiro imediatamente maior do que α, ou imediatamente menor do que α, aquele que estiver mais próximo de α. (É claro que um deles estará mais próximo de α do que o outro, pois, caso contrário, α estaria bem no meio, entre dois inteiros consecutivos, digamos n e $n+1$. Mas então α seria igual a $n+1/2$, que é um número racional, o que seria contrário à nossa hipótese.) Podemos dizer isto de outra maneira. Qualquer segmento AB, de comprimento unitário (isto é, de comprimento igual a uma unidade), marcado na reta real, como na Fig. 20, conterá exatamente um inteiro, a não ser que A e B sejam pontos inteiros. Chamemos, agora, de A o ponto correspondente ao número $\alpha - 1/2$ e B, o ponto correspondente a $\alpha + 1/2$. Como $\alpha - 1/2$ e $\alpha + 1/2$ não são inteiros (nem sequer são racionais - veja Teorema 4.1, Capítulo 4), sabemos que A e B não podem ser pontos inteiros. Chamando de m o único inteiro no segmento AB, vemos que m está estritamente entre $\alpha - 1/2$ e $\alpha + 1/2$. Assim

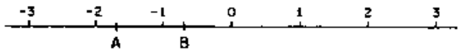


Figura 20

$$\alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2} .$$

Subtraindo α, obtemos

$$-\frac{1}{2} < m - \alpha < \frac{1}{2} .$$

Estando o número $m - \alpha$ entre $-1/2$ e $1/2$, o mesmo acontecerá com o número que se obtem trocando seu sinal e, portanto, $\alpha - m$ também estará entre $-1/2$ e $1/2$. Obtemos, assim, as desigualdades do Teorema 6.2.

O inteiro m é único, pois se existisse outro inteiro n, satisfazendo

$$-\frac{1}{2} < \alpha - n < \frac{1}{2} ,$$

então n também satisfaria

$$-\frac{1}{2} < n - \alpha < \frac{1}{2} .$$

Somando α a estas desigualdades, vemos que n satisfaria

$$\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2} .$$

Mas o segmento AB contém apenas um inteiro, de modo que n é igual a m.

Problemas - Lista 22

(Nesta lista e nas subseqüentes, o leitor talvez queira usar $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$, $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$, $\pi = 3,14159\ldots$,).

1. Ache os inteiros mais próximos de

(a) $\sqrt{2}$, (b) $2\sqrt{2}$, (c) $3\sqrt{2}$, (d) $4\sqrt{2}$, (e) $3\sqrt{3}$,

(f) $4\sqrt{3}$, (g) π, (h) 10π, (i) $-\sqrt{3}$, (j) -7π.

2. Dado um número irracional α qualquer, demonstre que existe um único inteiro q, tal que $0 < \alpha - q < 1$.

6.3 APROXIMAÇÃO POR NÚMEROS RACIONAIS

Um modo de se obter valores aproximados de um número irracional, como $\sqrt{2}$, é usar a forma decimal

$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots .$$

Os números 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421 ; ... formam uma seqüência de aproximações, cada vez mais precisas, de $\sqrt{2}$. Os números da seqüência são todos racionais e temos, assim, uma seqüência infinita de aproximações racionais de $\sqrt{2}$:

$$(1) \qquad \frac{1}{1},\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \frac{141421}{100000},\ldots .$$

À medida que avançamos na seqüência, estes números se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$. Além do mais, podemos escrever as desigualdades

$$\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1},$$
$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$
$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100},$$
$$\frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000},$$
$$\frac{14142}{10000} < \sqrt{2} < \frac{14143}{10000},$$
$$\frac{141421}{100000} < \sqrt{2} < \frac{141422}{100000}, \text{ etc.}$$

Estas desigualdades mostram que uma infinidade de termos de (1) estão tão próximos de $\sqrt{2}$ quanto se deseje especificar. Suponhamos, por exemplo, que desejamos nos certificar que existem infinitos números racionais diferindo de $\sqrt{2}$ por menos de 0,0001. Podemos obter estes números, escolhendo todos os termos da seqüência (1), salvo os quatro primeiros.

No entanto, os números racionais (1) apresentam uma particularidade: seus denominadores são potências de 10. É possível que existam, entre os números racionais, em geral, melhores aproximações de $\sqrt{2}$, sem qualquer restrição quanto a seus denominadores.

Examinemos o número racional π, exemplo bem conhecido que pode ilustrar nossa discussão. Como π tem o valor 3,14159..., a seqüência para π, análoga a (1), é

(2) $\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \ldots$.

No entanto, sabemos que 22/7 está mais próximo de π do que 31/10. De fato, 22/7 está mais próximo de π do que 314/100, mas não mais próximo do que os termos subseqüentes da seqüência (2).

Para não mais dependermos dos denominadores 10, 10^2, 10^3, etc., mostraremos, inicialmente, que todo número irracional pode ser aproximado por um número racional de denominador arbitrário.

Teorema 6.3. *Sejam λ um número irracional qualquer e n um inteiro positivo qualquer. Então existe um número racional de denominador n, digamos m/n, tal que*

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Motivaremos a demonstração deste teorema com um exemplo. Suponhamos que λ seja $\sqrt{2}$ e $n = 23$. Consideremos o número irracional $23\sqrt{2}$ que, usando a notação decimal de $\sqrt{2}$: 1,41421..., tem valor aproximado

$$23\sqrt{2} = 32{,}52\ldots .$$

Portanto, o inteiro mais próximo de $23\sqrt{2}$ é 33 e este é o "m" do Teorema 6.2, que, para $\alpha = 23\sqrt{2}$, afirma

$$-\frac{1}{2} < 23\sqrt{2} - 33 < \frac{1}{2}.$$

Mas, 33 é também o "m" do Teorema 6.3, pois, de acordo com o Teorema 6.1, podemos dividir estas desigualdades por 23 e obter

$$-\frac{1}{46} < \sqrt{2} - \frac{33}{23} < \frac{1}{46}.$$

Demonstração. Em geral, começando com qualquer irracional λ e qualquer inteiro positivo n, observamos, pelo Teorema 4.1 do Capítulo 4, que $n\lambda$ é irracional. Definiremos, então, m como sendo o inteiro mais próximo de $n\lambda$ e, assim, pelo Teorema 6.2,

$$-\frac{1}{2} < n\lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Pelo Teorema 6.1, estas desigualdades podem ser divididas pelo inteiro positivo n, dando

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n},$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo. Ache números racionais m/n, como no Teorema 6.3, para os casos em que $\lambda = \sqrt{2}$ e $n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ e 10.

Solução. Um cálculo simples mostra que os inteiros mais próximos de

$\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$, $9\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$

são 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13 e 14. Portanto, os números racionais pedidos são

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \frac{8}{6}, \frac{10}{7}, \frac{11}{8}, \frac{13}{9}, \frac{14}{10},$$

e o erro em cada uma destas aproximações é menor do que $1/2n$, onde n é o inteiro no denominador.

Este exemplo mostra que as frações m/n do Teorema 6.3 não são, necessariamente, irredutíveis.

Problemas - Lista 23

1. Ache números racionais m/n, como no Teorema 6.3, para os casos em que $\lambda = \sqrt{3}$ e n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

2. Ache os números racionais m/n, como no Teorema 6.3, para os casos em que $\lambda = \pi = 3{,}14159\ldots$ e n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 10.

3. Quaisquer que sejam o número irracional λ e o inteiro positivo n, demonstre que existe um inteiro m tal que

$$-\frac{1}{n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n} .$$

*4. Para um número irracional λ, fixo, e um inteiro positivo n, fixo, demonstre que existe somente um inteiro m satisfazendo as desigualdades do Teorema 6.3.

*5. Demonstre que o Teorema 6.3 seria falso se inseríssemos a palavra "irredutível" em relação a m/n, isto é, "...Então existe um número racional, na forma irredutível, de denominador n, digamos m/n, ...".

6.4 APROXIMAÇÕES MELHORES

O Teorema 6.3 afirma que qualquer número irracional λ pode ser aproximado por um número racional m/n "a menos de $1/2n$", isto é, com um erro menor do que $1/2n$. Será que esta aproximação pode ser feita a menos de $1/3n$, ou $1/4n$, ou, talvez, com um erro menor ainda? A resposta é sim. No próximo teorema veremos que λ pode ser aproximado por m/n, a menos de $1/kn$, para qualquer k que desejemos especificar: $k = 3$, $k = 4$, $k = 1000$, etc. Mas, enquanto que no Teorema 6.3 a aproximação, a menos de $1/2n$, podia ser conseguida para qualquer inteiro positivo n, a aproximação com erro menor do que $1/kn$, com um dado k, não poderá, no Teorema 6.4, ser obtida para todos os inteiros n.

Será que podemos aproximar qualquer número irracional λ por m/n, a menos de $1/n^2$, ou $1/n^3$, ou com um erro ainda menor? A menos de $1/n^2$, sim; a menos de $1/n^3$, não. Mas estes serão tópicos de secções posteriores. Comecemos, então, com aproximações de λ por m/n, a menos de $1/kn$.

Teorema 6.4. *Quaisquer que sejam o número irracional λ e o inteiro positivo k, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede k, tal que*

$$-\frac{1}{nk} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}.$$

Antes de apresentarmos uma demonstração do Teorema 6.4, válida para quaisquer λ e k, demonstraremos o teorema numa situação particular, a saber, para $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$. Inicialmente, enumeremos os múltiplos de λ desde $1.\lambda$ até $k.\lambda$. Façamos uma lista dos múltiplos de $\sqrt{3}$, escrevendo cada múltiplo como soma de dois números positivos, um inteiro e um número menor do que 1:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{3} = 1 + 0{,}732\ldots, & \sqrt{3} - 1 = 0{,}732\ldots, \\
2\sqrt{3} = 3 + 0{,}464\ldots, & 2\sqrt{3} - 3 = 0{,}464\ldots, \\
3\sqrt{3} = 5 + 0{,}196\ldots, & 3\sqrt{3} - 5 = 0{,}196\ldots, \\
4\sqrt{3} = 6 + 0{,}928\ldots, & 4\sqrt{3} - 6 = 0{,}928\ldots, \\
5\sqrt{3} = 8 + 0{,}660\ldots, & 5\sqrt{3} - 8 = 0{,}660\ldots, \\
6\sqrt{3} = 10 + 0{,}392\ldots, & 6\sqrt{3} - 10 = 0{,}392\ldots, \\
7\sqrt{3} = 12 + 0{,}124\ldots, & 7\sqrt{3} - 12 = 0{,}124\ldots, \\
8\sqrt{3} = 13 + 0{,}856\ldots, & 8\sqrt{3} - 13 = 0{,}856\ldots,
\end{array}$$

As expressões à direita foram obtidas das da esquerda, subtraindo a parte inteira.

A seguir, separemos o intervalo de 0 a 1 em oito partes $I_1, I_2, \ldots, I_8$, como se vê na Fig. 21. Assim, I_1 conterá os nú-

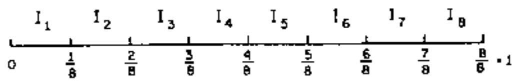


Figura 21

meros entre 0 e 1/8; I_2, os números 1/8 e 2/8; I_3, os números entre 2/8 e 3/8, e assim por diante.* Classificaremos, agora, as oito partes decimais dos múltiplos de $\sqrt{3}$ nas categorias I_1, $I_2, \ldots, I_8$, da seguinte maneira:

0,732... está em I_6 (porque 0,732...está entre 5/8 e 6/8),
0,464... está em I_4,
0,196... está em I_2,
0,928... está em I_8,
0,660... está em I_6,
0,392... está em I_4,
0,124... está em I_1,
0,856... está em I_7,

Usaremos o número que está em I_1, na lista acima.

0,124... está em I_1; isto é, $7\sqrt{3} - 12$ está em I_1.

---

* Como desejamos obter desigualdades estritas, é conveniente interpretar "entre" como "estritamente entre"; assim, os intervalos I_j contêm todos os pontos u tais que

$$(j-1)/8 < u < j/8$$

Mas os números em I_1 estão entre 0 e 1/8, de modo que

$$0 < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}.$$

Como o número $7\sqrt{3} - 12$ está entre 0 e 1/8, ele certamente estará entre -1/8 e 1/8. Portanto,

$$-\frac{1}{8} < 7\sqrt{3} - 12 < \frac{1}{8}.$$

Dividindo esta desigualdade por 7, obtemos

$$-\frac{1}{7.8} < \sqrt{3} - \frac{12}{7} < \frac{1}{7.8}.$$

Este é um resultado na forma do enunciado do Teorema 6.4, com $k = 8$, $n = 7$ e $m = 12$.

Baseamos nosso argumento no fato de $7\sqrt{3} - 12$ estar em I_1. O que teríamos feito se não existisse nenhum número no intervalo I_1? A resposta é que, se no intervalo I_1 não existisse nenhum número, então em um dos intervalos $I_2, I_3, \ldots, I_8$ existiriam dois ou mais números. No exemplo acima, não somente existe um número em I_1, mas também existem dois números em I_4 e dois em I_6. Consideremos o par em I_6:

0,732... está em I_6 ; isto é, $\sqrt{3} - 1$ está em I_6;

e

0,660... está em I_6 ; isto é, $5\sqrt{3} - 8$ está I_6.

Sempre que dois números estiverem em I_6 (ou, em qualquer um destes intervalos), eles estarão a menos de 1/8 um do outro, de modo que a sua diferença estará entre -1/8 e 1/8. Em particular para os dois números em I_6, temos:

$$-\frac{1}{8} < (5\sqrt{3} - 8) - (\sqrt{3} - 1) < \frac{1}{8},$$

$$-\frac{1}{8} < 4\sqrt{3} - 7 < \frac{1}{8}.$$

Dividindo por 4, obtemos

$$-\frac{1}{4.8} < \sqrt{3} - \frac{7}{4} < \frac{1}{4.8},$$

e este é um outro resultado na forma do enunciado do Teorema 6.4, para $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$, desta vez com $n = 4$ e $m = 7$.

Demonstração do Teorema 6.4. Os exemplos que acabamos de examinar servem de modelo para a demonstração do Teorema 6.4. Dado um número irracional λ e um inteiro positivo k, consideremos os k números λ, 2λ, 3λ, $4\lambda, \ldots, k\lambda$ e escrevamos cada um destes números como um inteiro mais uma parte fracionária ou decimal.

$$\begin{aligned}
\lambda &= a_1 + \beta_1, & \lambda - a_1 &= \beta_1,\\
2\lambda &= a_2 + \beta_2, & 2\lambda - a_2 &= \beta_2,\\
3\lambda &= a_3 + \beta_3, & 3\lambda - a_3 &= \beta_3,\\
4\lambda &= a_4 + \beta_4, & 4\lambda - a_4 &= \beta_4,\\
&\vdots & &\vdots\\
k\lambda &= a_k + \beta_k, & k\lambda - a_k &= \beta_k.
\end{aligned}$$

Os símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ representam inteiros, enquanto que os símbolos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ representam números entre 0 e 1. Em seguida, dividamos o intervalo de 0 a 1 em k partes $I_1, I_2, \ldots, I_k$, cada uma de comprimento $1/k$ (Fig. 22).

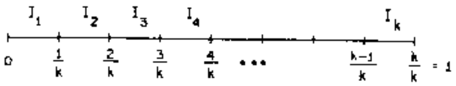


Figura 22

Assim, o intervalo I_1 conterá os números entre 0 e $1/k$; I_2, os números entre $1/k$ e $2/k$; I_3, os números entre $2/k$ e $3/k$, etc. A palavra "entre" está sendo usada, aqui, no sentido estrito, de modo que, por exemplo, os números $2/k$ e $3/k$ não são elementos do intervalo I_3. Observe que, de acordo com o Teorema 4.1 do Capítulo 4, cada um dos números $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ é irracional. Portanto, nenhum dos β's pode ser igual a qualquer um dos números racionais

$$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \frac{k}{k}.$$

Portanto, cada β está exatamente em um dos intervalos I_1, I_2, $I_3, \ldots, I_k$.

Existem duas possibilidades quanto a I_1: ou I_1 contém um ou mais β's, ou I_1 não contém nenhum dos β's. Trataremos estas duas possibilidades separadamente.

Caso 1. O intervalo I_1 contém um ou mais β's. Portanto existe um β, digamos β_n, no intervalo I_1. O símbolo n representa um dos inteiros $1, 2, 3, \ldots, k$. O número β_n é igual a $n\lambda - a_n$ e, portanto, sabemos que

$$0 < n\lambda - a_n < \frac{1}{k}$$

porque I_1 é o intervalo de 0 a $1/k$. Segue-se que

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - a_n < \frac{1}{k},$$

e, dividindo por n, obtemos

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{a_n}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Assim, o Teorema 6.4 fica provado neste caso, pois podemos definir m como sendo o inteiro a_n.

Caso 2. O intervalo I_1 não contém nenhum dos β's. Neste caso, os k números estão nos $k-1$ intervalos

$$I_2, I_3, \ldots, I_k.$$

Neste ponto vamos aplicar o *princípio da casa do pombo de Dirichlet* que afirma: se k pombos estiverem em $k-1$ casas, terá que existir pelo menos uma casa com dois ou mais pombos. Portanto, terá que existir pelo menos um intervalo contendo dois ou mais β's. Suponhamos que β_r e β_j estejam no mesmo intervalo onde r e j são dois números distintos, dentre 1, 2, 3,..., k. Suponhamos, ainda, que j seja maior do que r, de modo que $j-r$ será um inteiro positivo, menor do que k.

Por estarem β_r e β_j no interior do mesmo intervalo de comprimento $1/k$, sua diferença estará entre $-1/k$ e $1/k$. Assim:

$$-\frac{1}{k} < \beta_j - \beta_r < \frac{1}{k}.$$

Mas, $\beta_j = j\lambda - a_j$ e $\beta_r = r\lambda - a_r$, de modo que

$$-\frac{1}{k} < (j\lambda - a_j) - (r\lambda - a_r) < \frac{1}{k}$$

ou

$$-\frac{1}{k} < (j-r)\lambda - (a_j - a_r) < \frac{1}{k}.$$

Chamando $j-r$ de n e $a_j - a_r$ de m, temos

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - m < \frac{1}{k}.$$

Por definição n é um inteiro positivo e portanto, pelo Teorema 6.1 (d), podemos dividir a desigualdade por n e obter:

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Além do mais, sabemos que n, por ser igual a $j-r$, é menor do que k e assim completamos a demonstração do Teorema 6.4.

Observe que a fração m/n não é, necessariamente, irredutível. Se $j-r$ e $a_j - a_r$ não tiverem fatores comuns, m/n será irredutível; caso contrário, não.

Problemas - Lista 24

1. Após o enunciado do Teorema 6.4, há um exemplo para o caso $\lambda = \sqrt{3}$ e $k = 8$. Que valores de m e n teríamos obtido se tivéssemos escolhido os dois números 0.464... e 0,392... do intervalo I_4, ao invés dos dois números do intervalo I_6?

2. Aplique o método dado na demonstração do Teorema 6.4, em cada um dos seguintes casos e obtenha, assim, valores de m e n satisfazendo as desigualdades do Teorema 6.4:

(a) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 2$;	(h) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 8$;
(b) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 4$,	(i) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 10$;
(c) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 6$;	(j) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 14$;
(d) $\lambda = \sqrt{3}$, $k = 10$;	(k) $\lambda = \pi$, $k = 2$;
(e) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 2$;	(l) $\lambda = \pi$, $k = 4$;
(f) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 4$;	(m) $\lambda = \pi$, $k = 6$;
(g) $\lambda = \sqrt{2}$, $k = 6$;	(n) $\lambda = \pi$, $k = 8$.

6.5 APROXIMAÇÕES A MENOS DE $1/n^2$

No começo da Secção 6.4 indicamos a direção dos nossos estudos, a saber, buscar aproximações melhores para qualquer número irracional λ. Das aproximações de λ, por m/n, com erro inferior a $1/2n$, n qualquer, no Teorema 6.3, passamos para aproximações com erro inferior a $1/kn$, para algum $n \leq k$, no Teorema 6.4. Vamos obter agora aproximações com erros menores do que $1/n^2$.

Teorema 6.5. *Para todo número irracional λ, existem infinitos números racionais m/n, em forma irredutível, tais que*

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2} .$$

Demonstração. Observemos, inicialmente, que qualquer número racional m/n, satisfazendo a desigualdade do Teorema 6.4, automaticamente satisfará a do Teorema 6.5. A razão é a seguinte: como n não excede k, de $k \geq n$ podemos deduzir, usando as partes (d), (e) e (g) do Teorema 6.1, que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{kn} \leq \frac{1}{n^2} .$$

Portanto, qualquer número que esteja entre $-1/kn$ e $1/kn$ deverá, certamente, estar entre $-1/n^2$ e $1/n^2$.

A seguir, mostraremos que, se um número racional m/n, não em forma irredutível, satisfizer as desigualdades do teorema, estão o mesmo número racional, em forma irredutível, satisfará as desigualdades apropriadas. Denotemos por M/N a forma irredutível de m/n. Podemos supor que ambos, n e N, sejam positivos, deixando qualquer sinal negativo ser absorvido pelo numerador. Temos, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N} , \quad 0 < N < n,$$

porque simplificar uma fração até torná-la irredutível não altera o valor da fração, mas reduz o tamanho do denominador. Do Teorema 6.1, vem:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} ,$$

e, portanto, se λ satisfizer

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2} ,$$

automaticamente satisfará

$$-\frac{1}{N^2} < \lambda - \frac{M}{N} < \frac{1}{N^2} .$$

Para completar a demonstração do Teorema 6.5, precisamos demonstrar que existe *uma infinidade* de números racionais , em forma irredutível, satisfazendo as desigualdades. Suponhamos, ao contrário, que exista apenas um número finito destas frações, digamos

$$\frac{m_1}{n_1}, \ \frac{m_2}{n_2}, \ \frac{m_3}{n_3}, \ \ldots, \ \frac{m_i}{n_i} .$$

Consideremos, então, os i números

$$\lambda - \frac{m_1}{n_1}, \quad \lambda - \frac{m_2}{n_2}, \quad \lambda - \frac{m_3}{n_3}, \quad \ldots, \quad \lambda - \frac{m_i}{n_i}.$$

Pelo Teorema 4.1 do Capítulo 4, todos são irracionais e, portanto, nenhum deles é zero. Alguns podem ser positivos, outros negativos; vamos escolher um inteiro k, tão grande, que $1/k$ esteja entre 0 e todos os números positivos e $-1/k$ esteja entre 0 e todos os números negativos. Isto pode ser feito porque, quanto maior escolhermos k, mais próximos de 0 estarão os números $1/k$ e $-1/k$. Escolhamos, então, k tão grande que as seguintes desigualdades sejam todas falsas:

$$(3) \qquad \begin{aligned} -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{k}, \\ -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_2}{n_2} < \frac{1}{k}, \\ &\vdots \\ -\frac{1}{k} &< \lambda - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Para este valor de k, vamos aplicar o Teorema 6.4 e obter um número racional m/n, tal que

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Isto nos diz que $\lambda - m/n$ está entre $-1/kn$ e $1/kn$ e, portanto,

$\lambda - m/n$ terá que estar entre $-1/k$ e $1/k$; em símbolos,

$$-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}.$$

Mas, como todas as desigualdades (3) são falsas, concluímos que m/n é diferente de cada um dos i números m_1/n_1, m_2/n_2, ..., m_i/n_i. Portanto, obtivemos mais um número racional satisfazendo as desigualdades do Teorema 6.5.

Exemplo. Determine quatro aproximações racionais (em forma irredutível) do número π, suficientemente próximas de π para satisfazer as desigualdades do Teorema 6.5.

Solução. Observemos, inicialmente, que sendo $\pi = 3{,}14159\ \ldots$,

$$-\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{3}{1} < \frac{1}{1^2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{4}{1} < \frac{1}{1^2}$$

Para achar duas outras aproximações, podemos usar o método do Teorema 6.3 para obter os números racionais mais próximos de π, com denominadores 2, 3, etc.:

$$\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \frac{22}{7}, \ldots.$$

Rejeitamos 6/2 e 9/3 por não serem frações irredutíveis e testamos as demais para ver se satisfazem as desigualdades do Teorema

6.5; por exemplo,

$$-\frac{1}{36} < \pi - \frac{19}{6} < \frac{1}{36} . \qquad \text{(Verdade!)}$$

Somos, assim, levados a rejeitar 13/4 e 16/5 mas aceitar 19/6 e 22/7. Portanto, um conjunto de respostas ao problema seria 3/1, 4/1, 19/6 e 22/7.

O número racional 22/7 é uma aproximação muito boa de π. Não existe número racional com denominador entre 1 e 56 que esteja mais próximo de π. O número 179/57 está um pouco mais próximo de π do que 22/7, mas não satisfaz as desigualdades do Teorema 6.5. O número racional 355/113 satisfaz as desigualdades do Teorema 6.5 e está bem mais próximo de π do que 22/7. De fato, suas seis primeiras casas decimais coincidem com as de π.

Pode-se demonstrar a seguinte versão mais forte do Teorema 6.5: *Para todo número irracional* λ, *existem infinitos números racionais* m/n, *em forma irredutível, tais que*

$$-\frac{1}{n(n+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(n+1)} .$$

Com ajuda deste teorema, no exemplo acima, o número 4/1 (que é uma aproximação relativamente grosseira de π) pode ser eliminado.

Para demonstrar a versão mais forte do Teorema 6.5, vamos precisar de uma versão mais forte do Teorema 6.4. Apenas esboçaremos as passagens principais e deixaremos os detalhes a cargo do leitor.

Na demonstração do Teorema 6.4 foi usado o princípio da casa de pombo de Dirichlet para concluir que, dados k números, distribuídos em k intervalos, ou existe um número no primeiro intervalo, ou existe um intervalo contendo pelo menos dois destes números. Para obter a versão mais forte do Teorema 6.4, dividiremos nosso intervalo unitário em $k+1$ sub-intervalos e afirmamos: Dados k números, distribuídos em $k+1$ intervalos, ou existe um número no primeiro intervalo, ou existe um número no último intervalo, ou existe um intervalo contendo pelo menos dois números. Este uso do princípio da casa de pombo, nos permite colocar a desigualdade mais forte

$$-\frac{1}{n(k+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(k+1)},$$

no lugar da que apareceu no Teorema 6.4, sem, de outra forma, mudar o enunciado. A demonstração da versão mais forte do Teorema 6.5 fica, agora, imediata.

Problemas - Lista 25

1. Para um dado número irracional λ, demonstre que dois dos "infinitos números racionais m/n" do Teorema 6.5, têm $n = 1$, isto é, são inteiros.

2. Seja λ um número irracional dado. Demonstre que, salvo uma exceção, qualquer número racional, satisfazendo as desigualdades do Teorema 6.5, automaticamente satisfará as desigualdades do Teorema 6.3.

3. Ache dois números racionais, não inteiros, que satisfaçam as desigualdades do Teorema 6.5 para

(a) $\lambda = \sqrt{2}$; (b) $\lambda = \sqrt{3}$; (c) $\lambda = \sqrt{5}$.

4. (a) Dos cinco primeiros números da seqüência (1), quais satisfazem as desigualdades do Teorema 6.3, com $\lambda = \sqrt{2}$?

(b) Quais satisfazem as desigualdades do Teorema 6.5?

5. (a) Dos cinco primeiros números da seqüência (2), quais satisfazem as desigualdades do Teorema 6.3, com $\lambda = \sqrt{3}$?

(b) Quais satisfazem as desigualdades do Teorema 6.5?

*6. Demonstre que a afirmação do Teorema 6.5 é falsa no caso $\lambda = 3/5$.

*7. (a) Sejam a/b e m/n números racionais, em forma irredutível, com denominadores positivos. Demonstre que eles serão desiguais se $n > b$. Portanto, demonstre que, para $n > b$, as desigualdades

$$-\frac{1}{bn} < \frac{a}{b} - \frac{m}{n} < \frac{1}{bn}$$

são falsas.

(b) Demonstre que a afirmação do Teorema 6.5 é falsa se λ for qualquer número racional fixo, digamos $\lambda = a/b$.

*8. Complete a demonstração da versão mais forte do Teorema 6.5 (seguindo o esboço dado antes desta lista de problemas); mostre que $\pi - 4/1$ e $\pi - 19/6$ não satisfazem a desigualdade mais forte, mas $\pi - 22/7$ a satisfaz.

6.6 LIMITAÇÕES DAS APROXIMAÇÕES

Demonstramos no Teorema 6.3 que, para qualquer número irracional λ existem infinitos números racionais m/n tais que

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Depois, no Teorema 6.5, provamos que existem infinitos m/n tais que

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Será que é possível demonstrar que existem infinitos m/n tais que

$$-\frac{1}{2n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n^2}\ ?$$

A resposta é sim, mas não o demonstraremos aqui. De fato, existe um teorema famoso afirmando que, para qualquer número irracio nal λ, existem infinitos m/n tais que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5}n^2},$$

e, ainda mais, que $\sqrt{5}$ é a constante que fornece a melhor aproximação possível deste tipo. Isto significa que, se substituirmos $\sqrt{5}$ por qualquer constante maior, a afirmação torna-se falsa.

Para dar uma idéia de como é possível demonstrar que existe um limite para o tamanho da constante, vamos provar o seguinte resultado: *Não existem infinitos números racionais* m/n *tais que*

$$(4) \qquad -\frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}.$$

Provaremos, de fato, que (4) é impossível para qualquer inteiro n maior do que 10.

A demonstração é indireta. Vamos supor que (4) seja válida para alguns inteiros m e n, com $n > 10$. A desigualdade

$$-\frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} - \frac{m}{n}$$

implica, para $n > 10$, que

$$(5) \qquad \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} + \frac{1}{500} < 2.$$

Por outro lado, a desigualdade

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}$$

implica, para $n > 10$, que

$$(6) \qquad \frac{m}{n} > \sqrt{2} - \frac{1}{5n^2} > \sqrt{2} - \frac{1}{500} > 1.$$

Se somarmos m/n aos membros das desigualdades (4), obtemos

$$(7) \qquad \frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} + \frac{1}{5n^2}.$$

Se provarmos ser cada uma destas três partes positiva, pelo Teorema 6.1 (e), podemos elevá-las ao quadrado e manter as desigualdades. Por (6) vemos que

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2} > 1 - \frac{1}{5n^2} > 1 - \frac{1}{500} > 0.$$

Portanto, todas as partes de (7) são positivas e, elevando-as ao quadrado, obtemos

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{5n^2}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{5n^2}\right)^2,$$

$$\frac{m^2}{n^2} - \frac{2m}{5n^3} + \frac{1}{25n^4} < 2 < \frac{m^2}{n^2} + \frac{2m}{5n^3} + \frac{1}{25n^4}.$$

Multiplicando por n^2, obtemos

$$(8) \qquad m^2 - \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2} < 2n^2 < m^2 + \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2}.$$

Agora, por (5), vemos que

(9) $$m^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{1}{25n^2} < m^2 + \frac{2}{5}(2) + \frac{1}{25n^2}$$

$$< m^2 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2500} < m^2 + 1.$$

Por outro lado, por (5) podemos escrever

(10) $$m^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{1}{25n^2} > m^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right) > m^2 - \frac{4}{5} > m^2 - 1.$$

Aplicando (9) e (10) a (8), obtemos

$$m^2 - 1 < m^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{1}{25n^2} < 2n^2 < m^2 + \frac{2m}{5n} + \frac{1}{25n^2} < m^2 + 1.$$

$$m^2 - 1 < 2n^2 < m^2 + 1.$$

Mas $2n^2$ é um inteiro e se estiver entre os inteiros $m^2 - 1$ e $m^2 + 1$, terá que ser igual a m^2. Concluímos, então, que

$$2n^2 = m^2, \quad 2 = \frac{m^2}{n^2}, \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

e isto é uma contradição, pois $\sqrt{2}$ é irracional, enquanto que m e n são, supostamente, inteiros.

Problemas - Lista 26

1. (a) Demonstre que não existem números racionais m/n, com $n > 10$, tais que

$$-\frac{1}{5n^2} < \sqrt{3} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}.$$

(b) Ache todos os números racionais m/n satisfazendo estas desigualdades.

2. (a) Demonstre que não existem números racionais m/n, com $n > 10$, tais que

$$-\frac{1}{n^3} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}.$$

(b) Ache todos os números racionais m/n satisfazendo estas desigualdades.

3. (a) Demonstre que não existem números racionais m/n, com $n > 10$, tais que

$$-\frac{1}{n^3} < \sqrt{3} - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^3}.$$

(b) Ache todos os números racionais satisfazendo estas desigualdades.

6.7 UM RESUMO

Demonstramos vários resultados a respeito do grau de precisão com que um número irracional λ pode ser aproximado por infinitos números racionais m/n. O teorema mais forte afirmou que λ pode ser aproximado a menos de $1/n^2$. Na Secção 6.6 demonstramos um resultado negativo, a saber, que não existem infinitos racionais m/n a $1/(5n^2)$ de $\sqrt{2}$. Um resultado negativo análogo é válido para qualquer número algébrico. É verdade, embora não o demonstramos aqui, que não existem infinitos números racionais m/n a menos de $1/n^3$ de qualquer número algébrico λ. O mesmo não pode ser afirmado a respeito de números transcendentes em geral; é verdade para alguns, mas não para todos os números transcendentes. No próximo capítulo vamos exibir um número que pode ser aproximado por infinitos m/n, não apenas a menos de $1/n^3$, mas a menos de $1/n^4$, $1/n^{100}$, e, na verdade, a menos de $1/n^j$ para qualquer j que o leitor queira escolher, não importando quão grande. Será demonstrado que o número exibido não é algébrico, mostrando, assim, que coisas como números transcendentes existem. Até agora temos falado deles sem saber, ao menos, se eles existem!

A EXISTÊNCIA DE NÚMEROS TRANSCENDENTES

Como sabemos que números transcendentes existem? Responderemos a esta questão neste capítulo final. Exibir um número transcendente é bastante fácil; provar que ele é transcendente é outra coisa. O número específico que vamos provar ser transcendente tem uma característica importante: ele é formado essencialmente de zeros, quando escrito em notação decimal. Vamos representá-lo por α. Seu valor é

$$\alpha = 0{,}1100010000\ldots$$

onde os "uns" ocorrem nas casas decimais

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ \ldots,$$

isto é, nas casas decimais

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ 4!,\ 5!,\ 6!,\ 7!,\ \ldots$$

O símbolo $k!$, onde k é um número natural, lê-se *k fatorial* e representa o produto de todos os números naturais de 1 até k; assim,

$$k! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (k-2) \,.\, (k-1) \,.\, k.$$

Todos os algarismos, na representação decimal de α, são zeros, exceto aqueles que estão nas casas decimais correspondentes aos fatoriais acima. Portanto, α pode ser escrito como uma soma de potências negativas de 10; isto é,

$$(1) \qquad \alpha = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + \ldots$$

$$= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \ldots$$

$$= 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}000001 + \ldots .$$

Este número α é chamado número de Liouville, em homenagem ao matemático francês que foi o primeiro a demonstrar a existência de números transcendentes.

Que propriedades concretas do número transcendente α poderemos usar para provar que ele não é algébrico? A resposta é que α pode ser aproximado por uma infinidade de números racionais m/n, não somente a menos de $1/n^2$ (isto podia ser feito para qualquer número irracional, veja Capítulo 6) mas, a menos de $1/n^3$, $1/n^4$, e, de fato, a menos de $1/n^r$, onde r é um número positivo qualquer. Nenhum número algébrico tem esta propriedade. Se λ for um número irracional qualquer, ele poderá ser aproximado, a menos de $1/n^2$, por infinitos racionais m/n, como vimos no Teorema 6.5. Mas, se λ for algébrico, ele não poderá ser aproximado por infinitos m/n com precisão maior do que esta, não a menos de $1/n^3$, nem mesmo a menos de $1/n^{2,1}$; a menos de $1/n^2$ é a melhor aproximação possível dentre todos os $1/n^r$. Achar este

tipo de resultado a respeito de números algébricos foi, por muitos anos, um importante problema aberto. Ele foi resolvido, em 1955, pelo matemático inglês K. F. Roth que, por este trabalho tão engenhoso, recebeu uma medalha Fields, em 1958, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Edinburgo, Escócia. O resultado é conhecido como Teorema de Thue-Siegel-Roth, porque A. Thue e C. L. Siegel provaram alguns resultados preliminares sobre os quais Roth baseou seu trabalho.

Como dissemos, demonstrar a transcendência de α é muito mais difícil do que simplesmente escrever sua expansão decimal. Usaremos as idéias sobre desigualdades da Secção 6.1. Vamos, também, precisar do conceito de valor absoluto. Talvez o leitor esteja familiarizado com o conceito, mas caso não esteja, daremos uma breve introdução deste tópico, bem como um teorema sobre polinômios.

7.1 ALGUNS PRELIMINARES DA ÁLGEBRA

Qualquer número real a ou é positivo, ou negativo, ou zero. Para todo número real a, vamos definir o "valor absoluto de a", representado pelo símbolo $|a|$. Se a for positivo ou zero, definiremos o valor absoluto de a pela igualdade $|a| = a$. Se a for negativo, a definição será $|a| = -a$. Por exemplo,

$$|0| = 0, \quad |7| = 7, \quad |-4| = 4, \quad |-6| = 6,$$

$$|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |-1000| = 1000.$$

Em vez de separar a definição nos casos em que a é positivo, ze ro ou negativo, poderíamos definir o valor absoluto de a por uma única igualdade:

$$(2) \qquad |a| = \sqrt{a^2}$$

por causa da convenção de que $\sqrt{a^2}$ nunca é um número negativo.

Um resultado básico é o seguinte: se dois números forem iguais, os seus valores absolutos também o serão. Em símbolos, se $a = b$, então $|a| = |b|$. Uma outra conseqüência simples da definição (2) é: a e $-a$ têm o mesmo valor absoluto, qualquer que seja o valor de a. Em símbolos, $|a| = |-a|$.

Um outro resultado importante: $|ab| = |a|\ |b|$. Podemos provar esta igualdade, usando (2), da seguinte maneira:

$$|a| = \sqrt{a^2}, \quad |b| = \sqrt{b^2}, \quad |ab| = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2},$$

de modo que

$$|ab| = |a|\ .\ |b|.$$

Que relação existe entre $|a + b|$ e a soma $|a| + |b|$? Vamos mostrar que $|a + b| \leq |a| + |b|$. Para demonstrar este resultado, conhecido no contexto mais amplo dos números complexos, como *desigualdade triangular*, vamos separar o problema em casos. Se a e b forem ambos positivos, então

$$|a + b| = a + b, \quad |a| = a, \quad |b| = b,$$

de modo que

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

Se a e b forem ambos negativos, então

$$|a + b| = -a-b, \quad |a| = -a, \quad |b| = -b,$$

de modo que, novamente,

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

Se a e b tiverem sinais opostos, um positivo e outro negativo, em $a + b$ haverá algum cancelamento e podemos dizer que $|a + b|$ é menor do que o maior dentre $|a|$ e $|b|$.

Segue-se que $|a + b| < |a| + |b|$.

Se um dos números for zero, por exemplo, se $b = 0$, então

$$|a + b| = |a + 0| = |a|, \quad |b| = |0| = 0,$$

e, assim,

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

Resumindo, vê-se que em todos os casos temos

$$|a + b| = |a| + |b| \quad \text{ou} \quad |a + b| < |a| + |b|.$$

Todos estes resultados sobre valores absolutos estão coletados, por conveniência, no seguinte teorema:

Teorema 7.1 *Para todos os números reais a e b, temos:*

(1) Se $a = b$, então $|a| = |b|$;

(2) $|a| = |-a|$;

(3) $|ab| = |a|.|b|$;

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

A seguir, vamos demonstrar o *teorema de d'Alembert* da álgebra. Na verdade, vamos prová-lo em uma situação especial visando o uso que dele faremos mais adiante.

Teorema 7.2 *Sejam $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e β um número racional, raiz de $f(x) = 0$. Então $x-\beta$ é um fator de $f(x)$; isto é, existe um polinômio $q(x)$ tal que $f(x) = (x - \beta)\, q(x)$. Além do mais, $q(x)$ tem coeficientes racionais e seu grau é uma unidade menor do que o grau de $f(x)$.*

Demonstração. Se dividirmos $f(x)$ por $x - \beta$ resultará um quociente $q(x)$ e um resto, digamos, r. Sendo o grau do resto sempre menor do que o grau do divisor (que, no nosso caso, é o polinômio $x - \beta$, de grau 1), vemos que r é uma constante, independente de x. Segue-se que

$$f(x) = (x - \beta)\, q(x) + r,$$

e, como no processo de divisão as passagens são, por assim dizer, operações racionais, vemos que $q(x)$ terá coeficientes racionais. A equação acima é uma identidade em x, portanto podemos substituir x por β e obter $f(\beta) = r$. Mas, $f(\beta) = 0$ pois β é uma raiz de $f(x) = 0$. Daí, $r = 0$, isto é, o resto da divisão de $f(x)$ por $x - \beta$ é zero e assim, $f(x) = (x - \beta)\, q(x)$. Finalmente, qualquer que seja o grau de $f(x)$, vemos que o grau de $q(x)$ é uma unidade menor.

Problemas - Lista 27

1. Escreva os valores de $|2|$, $|-2|$, $|-8|$ e $|10^{-1}|$.
2. No texto dissemos: se $a = b$, então $|a| = |b|$. A recíproca é verdadeira?
3. Demonstre: $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$.
4. (a) Demonstre: $|x + 7| = x + 7$ se $x \geq -7$ mas,

   $|x + 7| = -x - 7$ se $x \leq -7$.

   (b) Faça uma análise semelhante para $|x - 7| = x - 7$.
5. Para que valores de x, se existirem, valem as seguintes igualdades?

(a) $|x + 7| = 5 + |x|$; (c) $|x + 7|+|x - 7|=|x|+7$;

(b) $|x| = |x - 4|$; (d) $|2x| = 2|x|$.

6. Demonstre que as desigualdades do Teorema 6.5 do Capítulo 6,

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2},$$

podem ser escritas na forma

$$\left|\lambda - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

7. Demonstre: $8! = 8(7!)$; demonstre também que $(j+1)!=(j+1)(j!)$.

8. Demonstre: $(j+1)! - j! = j(j!)$.

9. Verifique que $3/2$ é uma raiz de $2x^4-13x^3+27x^2-4x-21 = 0$. Chame este polinômio de $f(x)$ e verifique a afirmação do Teorema 7.2, calculando o quociente $q(x)$ da divisão de $f(x)$ por $x - 3/2$.

7.2 UMA APROXIMAÇÃO DE α

A razão que está por trás da transcedência de α é que ele pode ser aproximado excepcionalmente bem por certos números racionais. É isto que vamos provar agora. Pode-se obter uma boa aproximação racional de α escolhendo um número finito de termos da série (1) que define α. Chamemos de β a soma dos primeiros

j termos de α, dado em (1); isto é

$$\beta = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} +\ldots+10^{-j!}. \tag{3}$$

O valor do inteiro j será especificado mais tarde. Observemos que β é racional porque pode ser escrito como uma soma de frações cujos denominadores são potências de 10;

$$\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots + \frac{1}{10^{j!}}.$$

Todas estas frações podem ser escritas com denominador comum $10^{j!}$ e somadas, dando uma só fração.

$$\beta = \frac{t}{10^{j!}} \tag{4}$$

onde o numerador t representa algum *inteiro* cujo valor exato não vem ao caso.

O número racional β está muito próximo de α. Das eq. (1) e (3), vemos que

$$\alpha - \beta = 10^{-(j+1)!} + 10^{-(j+2)!} + 10^{-(j+3)!} + \ldots .$$

A representação decimal de $\alpha - \beta$, como a de α, é inteiramente formada de zeros e uns. O algarismo 1 aparece pela primeira vez na posição $(j+1)!$, em seguida na posição $(j+2)!$, e assim por diante. Portanto o número $\alpha - \beta$ é menor do que

$$0.000000\ldots0000002,$$

onde todos os algarismos são zeros exceto o algarismo 2 na posição $(j+1)!$. Em outras palavras,

(5) $$\alpha - \beta < \frac{2}{10^{(j+1)!}} \cdot$$

Vamos precisar de mais algumas desigualdades simples envolvendo α e β. Como α e β são positivos, todas as potências de α e β serão positivas. Além disso, como $\alpha < 1$ e $\beta < 1$, vemos que $\alpha^r < 1$, $\beta^s < 1$ e $\alpha^r\beta^s < 1$, quaisquer que sejam os inteiros positivos r e s. Temos então

(6) $$0 < \alpha^r < 1, \quad 0 < \beta^s < 1, \quad 0 < \alpha^r\beta^s < 1.$$

7.3. O PLANO DA DEMONSTRAÇÃO

Para demonstrar que α é transcendente, vamos supor exatamente o contrário, isto é, que α é algébrico e obter uma contradição. A hipótese de α ser algébrico significa que α satisfaz alguma equação algébrica com coeficientes inteiros. Dentre todas as equações com coeficientes inteiros, satisfeitas por α, escolhemos uma, de menor grau, digamos

(7) $$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0 = 0.$$

Para abreviar, escreveremos $f(x)$ no lugar do polinômio no primeiro membro de (7). Este polinômio $f(x)$ terá um papel cen-

tral no decorrer de todo o capítulo. As hipóteses básicas feitas a respeito de $f(x)$ e que devemos manter em mente, são:

(1) $f(x)$ tem coeficientes inteiros;

(2) o número α é uma raiz de $f(x) = 0$, isto é, $f(\alpha)$ é zero (onde $f(\alpha)$ é o resultado que se obtém, substituindo, em $f(x)$, x por α);

(3) o número α não é raiz de nenhuma equação com coeficientes inteiros e de grau menor do que n.

O número $f(\beta)$, obtido substituindo x por β em $f(x)$, também desempenhará um papel importante na análise.

A idéia da demonstração é a seguinte: Vamos olhar para o número $f(\alpha) - f(\beta)$ (ou $-f(\beta)$, que é o mesmo, pois $f(\alpha) = 0$) sob dois aspectos. Um, será considerar $-f(\beta)$ como um polinômio em β, com coeficientes inteiros. Como β é racional, $-f(\beta)$ também será racional e veremos que seu valor absoluto é relativamente grande. O outro, será ver $f(\alpha) - f(\beta)$ como uma diferença de dois polinômios; mostraremos na próxima secção que esta diferença é da mesma ordem de grandeza do que a diferença $\alpha - \beta$, que é relativamente pequena (veja eq. (5)). Assim, supondo que α é algébrico, chegaremos a duas ordens de grandeza conflitantes para $f(\alpha) - f(\beta)$ e, teremos assim, uma contradição.

Preparando o caminho para a demonstração, mostraremos na próxima secção que $f(\beta)$ não é zero e que $f(\alpha) - f(\beta)$ e $\alpha - \beta$ têm a mesma ordem de grandeza.

Problemas - Lista 28

1. Verifique as identidades

   (a) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$;

   (b) $\alpha^5 - \beta^5 = (\alpha - \beta)(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4)$;

   (c) $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha - \beta)(\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5)$.

2. Escreva uma identidade, expressando $\alpha^7 - \beta^7$ como o produto de $\alpha - \beta$ por um polinômio de grau 6.

3. Demonstre que um número algébrico é raiz de uma infinidade de equações algébricas com coeficientes inteiros.

7.4 PROPRIEDADES DOS POLINÔMIOS

Teorema 7.3. *O número β não é uma raiz da eq.(7); isto é, $f(\beta) \neq 0$.*

Demonstração. Se β fosse raiz de (7), então pelo Teorema 7.2, $x - \beta$ seria um fator de $f(x)$, isto é,

$$f(x) = (x - \beta)\ q(x)$$

Ainda pelo Teorema 7.2, $q(x)$ teria coeficientes racionais e seu grau seria uma unidade menor do que o grau de $f(x)$. Sendo α uma raiz de $f(x) = 0$, teríamos

$$f(\alpha) = (\alpha - \beta)\ q(\alpha) = 0.$$

Mas este produto é zero somente se um dos fatores for zero. O fator $\alpha - \beta$ não é zero porque α é diferente β. Portanto $q(\alpha)=0$; isto é, α seria uma raiz de $q(x) = 0$ e $q(x)$ tem grau $n - 1$. Se representarmos por a o produto de todos os denominadores dos coeficientes racionais de $q(x)$, o produto $aq(x)$ terá coeficientes inteiros e α será uma raiz de $aq(x) = 0$. Mas isto irá contrariar a hipótese de α não satisfazer nenhuma equação com coeficientes inteiros de grau menor do que n. Como a hipótese $f(\beta) = 0$ nos levou a uma contradição, concluímos que $f(\beta) \neq 0$.

A seguir, seguindo o plano feito na última secção, vamos mostrar que $f(\alpha) - f(\beta)$ tem a mesma ordem de grandeza do que $\alpha - \beta$, que é muito pequeno (veja Secção 7.2).

Teorema 7.4. *Existe um número N, dependendo somente dos coeficientes de $f(x)$ e do seu grau, tal que*

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta).$$

Demonstração. O número N é definido pela equação

$$N = n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + (n-2)|c_{n-2}| + \ldots + 2|c_2| + |c_1|. \quad (8)$$

Observe, em particular, que N é independente do inteiro j usado na definição de β.

No decorrer da demonstração, vamos precisar da fatora ção de $\alpha^k - \beta^k$ e de uma desigualdade satisfeita por $\alpha^k - \beta^k$. A fatoração é dada por

$$\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\alpha^{k-3}\beta^2+\dots + \alpha^2\beta^{k-3}+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1}), \tag{9}$$

onde k é um inteiro positivo qualquer. Esta fatoração pode ser verificada, efetuando a multiplicação no segundo membro de (9)

$$\alpha(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1})$$
$$=\alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\dots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}$$

e

$$\beta(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1})$$
$$=\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\dots+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k.$$

Subtraindo estas duas equações, observamos que todos os termos, exceto o primeiro da primeira equação e o último da segunda equação, se cancelam, ficando apenas $\alpha^k - \beta^k$.

Olhando para o segundo membro da eq.(9) e para as desigualdades (6), vemos que todos os termos α^{k-1}, $\alpha^{k-2}\beta$, etc. são menores do que 1. Como existem exatamente k destes termos e como $\alpha - \beta$ é positivo, podemos escrever

$$\alpha^k - \beta^k < (\alpha - \beta)(1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1) = k(\alpha - \beta). \tag{10}$$

Calculemos agora $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ usando a eq. (7) e efetuemos a diferença $f(\alpha) - f(\beta)$. Obteremos:

$$f(\alpha)-f(\beta)=c_n(\alpha^n-\beta^n)+c_{n-1}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})+\dots+c_1(\alpha-\beta).$$

Usemos a identidade (9) para poder colocar em evidência o fator $\alpha - \beta$, comum a todos os termos do segundo membro. Isto nos leva a

$$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)\big[c_n(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$$
$$+c_{n-1}(\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}\beta+\dots+\alpha\beta^{n-3}+\beta^{n-2})$$
$$+\dots+c_1\big].$$

Tomando valores absolutos e usando o Teorema 7.1 e a desigualdade de (10), obtemos

$$|f(\alpha)-f(\beta) < |\alpha-\beta|\big[n|c_n|+(n-1)|c_{n-1}|+\dots+|c_1|\big].$$

Observando que $|\alpha-\beta| = \alpha - \beta$ e usando a equação (8) que define N, temos, finalmente, que $|f(\alpha)-f(\beta)| < N(\alpha-\beta)$, como queríamos demonstrar.

7.5 A TRANSCENDÊNCIA DE α

Vamos agora completar a demonstração de que o número α, definido pela eq. (1) é transcendente. Inicialmente, olharemos para $f(\alpha) - f(\beta)$, sob outro aspecto.

Teorema 7.5. *O número*

$$|f(\alpha) - f(\beta)|.10^{n\cdot j!} \tag{11}$$

é um inteiro positivo qualquer que seja o valor atribuído ao inteiro positivo j.

Demonstração. Como $f(\alpha) = 0$, o número acima pode ser escrito como

$$|-f(\beta)|.10^{n.j!} \quad \text{ou} \quad |f(\beta)|.10^{n.j!}.$$

Das eqs. (7) e (4) vê-se que

$$f(\beta)=c_n\beta^n+c_{n-1}\beta^{n-1}+c_{n-2}\beta^{n-2}+\ldots+c_1\beta+c_0$$

$$=\frac{c_nt^n}{10^{n.j!}}+\frac{c_{n-1}t^{n-1}}{10^{(n-1)j!}}+\frac{c_{n-2}t^{n-2}}{10^{(n-2)j!}}+\ldots+\frac{c_1t}{10^{j!}}+c_0.$$

Multiplicando por $10^{n.j!}$, temos

$$f(\beta).10^{n.j!}$$

$$=c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}10^{j!}+c_{n-2}t^{n-2}10^{2j!}+\ldots+c_1t10^{(n-1)j!}+$$

$$+c_010^{n.j!},$$

e o segundo membro é um inteiro. Este inteiro não pode ser zero porque $f(\beta) \neq 0$ pelo Teorema 7.3.. Tomando valores absolutos, vemos que

$$|f(\beta).10^{n.j!}| \quad \text{ou} \quad |f(\beta)|.10^{n.j!}$$

é um inteiro positivo e o teorema está demonstrado.

Obteremos agora uma contradição direta do Teorema 7.5, mostrando que o número dado por (11) está entre 0 e 1. Para isto precisaremos escolher o inteiro j que foi usado na definição de β de modo que satisfaça

$$\frac{2N.10^{n.j!}}{10^{(j+1)!}} < 1. \tag{12}$$

Será que isso pode ser feito? Pode, porque esta desigualdade é equivalente a

$$\frac{2N}{10^{(j+1)!-n.j!}} < 1,$$

onde o expoente no denominador pode ser escrito como

$$(j+1)!-n.j!=(j+1)j!-n.j!=(j+1-n)j!.$$

Este expoente, para um n fixo, pode se tornar tão grande quanto desejarmos bastando para isto tomar j muito grande. Os valores de n e N são fixados pelas equações (7) e (8); mas como j não depende nem de n, nem de N, podemos tomar j suficientemente grande para que (12) seja satisfeita.

A seguir, usando o Teorema 7.4 e a desigualdade (5), vamos mostrar que o número dado por (11) está entre 0 e 1. Assim:

$$
\begin{aligned}
|f(\alpha) - f(\beta)|.10^{n\cdot j!} &< N(\alpha-\beta).10^{n\cdot j!} \\
&< \frac{2N.10^{n\cdot j!}}{10^{(j+1)!}} \\
&< 1,
\end{aligned}
$$

onde, na última passagem, usamos (12). É claro, por causa do Teorema 7.3, que o número em (11) é positivo.

Temos, portanto, uma contradição e concluímos que α não pode satisfazer nenhuma equação da forma (7). Assim, α é um número transcendente.

7.6 UM RESUMO

Neste capítulo respondemos à questão: "Existem números transcendentes?", exibindo um número de Liouville e provando ser ele transcendente, isto é, não algébrico.

Vamos recapitular a demonstração toda, pois os detalhes talvez tenham obscurecido o argumento. Dissemos, no início do capítulo, que a idéia central seria o fato de que o número

$$\alpha = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + \ldots$$

pode ser aproximado, com grande precisão, por números racionais. Este fato está explícito na desigualdade (5) que diz ser $\alpha - \beta$ muito pequeno em comparação com β. Recordemos que β é um número racional com denominador $10^{j!}$ (veja eq. (4)), mas que $\alpha-\beta$ é da ordem de $10^{-(j+1)!}$. No Teorema 7.4, esta pequena ordem de

grandeza foi estendida de $\alpha - \beta$ para $f(\alpha) - f(\beta)$, onde $f(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros que, para $x = \alpha$, supostamente se anula.

Por outro lado, considerando $f(\alpha) - f(\beta)$ sob um ponto de vista bem diferente, no Teorema 7.5, mostramos que o tamanho de $f(\alpha) - f(\beta)$ é maior do que o estimado anteriormente. (O fator $10^{n\cdot j!}$, no Teorema 7.5, não tem papel essencial; ele está presente para colocar as duas ordens de grandeza de $f(\alpha) - f(\beta)$ em nítido contraste). Isto foi feito, reconhecendo que $f(\alpha)-f(\beta)$ é simplesmente $-f(\beta)$ e $f(\beta)$ é um número racional com denominador $10^{n\cdot j!}$. Portanto a hipótese de α satisfazer $f(x) = 0$ nos permitiu demonstrar que $f(\alpha) - f(\beta)$ é muito maior do que os cálculos anteriores mostraram. Esta contradição provou que α é transcendente.

APÊNDICE A

DEMONSTRAÇÃO DE QUE EXISTEM INFINITOS NÚMEROS PRIMOS

A argumentação que usaremos aqui é a chamada demonstração indireta, também conhecida como demonstração por contradição, ou ainda, por redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*). Neste tipo de demonstração supõe-se que a proposição seja falsa e, a partir desta hipótese, deduz-se uma contradição. Assim, no caso da proposição em questão, vamos supor que exista apenas um número finito de primos.

Havendo apenas um número finito de primos, vamos representá-los por

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k.$$

Esta notação significa que existem exatamente k primos, onde k é algum número natural. Se pensarmos nos primos dispostos em ordem crescente, então, naturalmente, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, e assim por diante. Nesta demonstração, porém, será mais conveniente o uso da notação p_1, p_2, p_3, etc. do que 2, 3, 5, etc.

Como todo número natural pode ser decomposto em fatores primos, observamos que todo número natural tem que ser divisível, ao menos por um dos primos

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k,$$

pois estamos supondo que não existem outros primos além destes. Consideremos, agora, o número natural n que se obtém multiplicando todos os primos e somando 1 ao resultado:

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k + 1.$$

Este número n não é divisível por p_1, pois, se dividirmos n por p_1 obteremos um quociente e um resto cujos valores são:

$$\text{quociente} = p_2 p_3 \ldots p_k, \quad \text{resto} = 1$$

Se n fosse divisível por p_1, o resto seria 0; portanto n não é divisível por p_1.

Um argumento análogo mostra que n não é divisível por p_2, ou p_3, ou p_4 ..., ou p_k.

Temos então um número n que não é divisível por nenhum primo e esta é uma situação absurda. Portanto a hipótese de existir apenas um número finito de primos nos levou a uma contradição lógica e, conseqüentemente, esta hipótese é falsa. Portanto existem infinitos primos.

APÊNDICE B

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Será demonstrado neste apêndice *que todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores.* Subentende-se que todo número natural primo, como 23, já está "decomposto em fatores primos". O resultado pode ser facilmente verificado para números naturais pequenos. Por exemplo, 10 pode ser decomposto em 2.5 e sabemos, por experiência, que não existe outra decomposição de 10 em fatores primos. O mesmo acontece com todos os números até 10:

$$2 = 2$$
$$3 = 3$$
$$4 = 2.2$$
$$5 = 5$$
$$6 = 2.3$$
$$7 = 7$$
$$8 = 2.2.2$$
$$9 = 3.3$$
$$10 = 2.5$$

Poderíamos aumentar esta lista, mas uma tal listagem, por mais comprida que fosse, não poderia ser considerada uma demonstração.

Pois, afinal, existem infinitos números naturais e não poderíamos verificar a decomposição em fatores primos de todos eles.

Portanto precisaremos recorrer a um argumento matemático. Fizemos uma lista dos números de 2 até 10, cada um com sua decomposição única em fatores primos. Ou esta lista pode ser estendida indefinidamente de modo que, para todo número natural haja uma decomposição única em fatores primos, ou então, em algum lugar na listagem, a propriedade da decomposição única irá falhar. Estas são as duas únicas possibilidades. Queremos demonstrar a primeira destas duas possibilidades e vamos fazê-lo usando um argumento indireto. Vamos supor que a segunda possibilidade seja a que se verifica, isto é, que em algum lugar, na listagem dos números naturais, a propriedade da decomposição única em fatores primos falhe. Mostraremos que isto nos levará a uma contradição.

Antes de entrar nos detalhes deste argumento bastante longo, vamos fazer um rápido esboço para orientar o leitor.

Representaremos por m o primeiro inteiro que possa ser decomposto em fatores primos de mais do que uma maneira e vamos escrever para m duas decomposições distintas em fatores primos. Na parte I da demonstração mostraremos que nenhum dos primos em uma das decomposições poderá ocorrer na outra. Tendo demonstrado isto, se m tivesse de fato duas decomposições distinta em fatores primos, todos os primos de uma delas seriam diferentes de todos os primos da outra. Na parte II da demonstração construiremos um número n, menor do que m que também terá duas decomposições distintas em fatores primos. Isto irá contradizer a hipótese de ser

m o menor inteiro com esta propriedade e o teorema estará demonstrado.

Representemos por m o primeiro inteiro que possa ser decomposto em primos de mais do que uma maneira. Em outras palavras, vamos supor que todo número natural menor do que m tenha a propriedade da decomposição única, enquanto que m tem mais do que uma decomposição. Assim, para m existem pelo menos duas decomposições em fatores primos, distintas. Podemos escrever

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{e} \quad m = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s.$$

O que queremos dizer com esta notação? Queremos dizer que m pode ser decomposto nos primos p_1, p_2, p_3, etc. até p_r e que também existe uma outra maneira de decompor m em primos q_1, q_2, q_3, etc., q_s. Por que não q_1, q_2, q_3, etc. até q_r? Porque não podemos pressupor que o número de fatores primos seja o mesmo nas duas decomposições; pelo que sabemos, o número de fatores pode ser diferente.

A notação requer mais explicações. Ela não significa, como no Apêndice A, que p_1 é apenas uma outra representação do primo 2, p_2 uma outra representação do primo 3, e assim por diante. Nada disto. Não sabemos se o primo 2 está, ou não, entre os primo $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Pode ser que p_1 seja 2, seja 23, seja 47, ou talvez não seja nenhum destes. Ele é, simplesmente, algum primo. Do mesmo modo, p_2 é somente algum primo. Pode ser igual ao primo p_1, mas pode também não ser. Estamos tão somente supondo que o número natural m pode ser decomposto em fatores primo de dois modos distintos.

Parte I da Demonstração. O primeiro fato que podemos mostrar é que os primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ na primeira decomposição são completamente diferentes dos primos $q_1, q_2, \ldots, q_s$, na segunda . Em outras palavras, se o primo 7 ocorrer na primeira decomposição, ele não poderá ocorrer na segunda. Como isto não é, de modo algum, óbvio, vamos apresentar um argumento. Se as duas decomposições tivessem um primo comum, poderíamos arranjar a notação de tal modo que este primo fosse o primeiro fator em cada uma das decomposições. Assim $p_1 = q_1$. (Isto pode ser feito, pois em cada decomposição os primos podem ser tomados em qualquer ordem). Como $p_1 = q_1$, podemos muito bem escrever p_1 no lugar de q_1, de modo que as duas decomposições fiquem:

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{e} \quad m = p_1 q_2 q_3 \cdots q_s.$$

Dividindo estas igualdades por p_1, obtemos

$$\frac{m}{p_1} = p_2 p_3 \cdots p_r \quad \text{e} \quad \frac{m}{p_1} = q_2 q_3 \cdots q_s.$$

Obtivemos, assim, duas decomposições diferentes para o número natural m/p_1 por termos começado com duas decomposições diferentes de m. Mas isto é impossível pois m era o menor número que possuia mais do que uma decomposição em fatores primos e m/p_1 é menor do que m.

Parte II da Demonstração. Provamos então que os primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ da primeira decomposição de m são completamente diferentes dos primos $q_1, q_2, \ldots, q_s$ da segunda. Em particular, sabemos que p_1 não é igual a q_1; em símbolos matemáticos, $p_1 \neq q_1$. Vamos supor que p_1 seja o menor dos dois, isto é, $p_1 < q_1$. Temos o direito de fazer esta suposição porque a notação, nas duas decomposições em primos, é totalmente simétrica. Assim, se conseguirmos completar a demonstração no caso em que $p_1 < q_1$, uma demonstração simétrica, com os p's e q's em posições trocadas, será válida no caso em que $p_1 > q_1$.

Supondo, então, $p_1 < q_1$, vamos exibir um número menor do que m que possui duas decomposições distintas em fatores primos. Isto completará a demonstração porque haverá uma contradição da hipótese inicial de ser m o menor número a possuir mais do que uma decomposição em fatores primos. Um número natural com as especificações desejadas, é

$$n = (q_1 - p_1)\, q_2 q_3 q_4 \cdots q_s.$$

Observe como n foi construído: ele é o produto de $q_1 - p_1$ pelos primos $q_2, q_3, \ldots, q_s$; pode ser escrito como uma diferença

$$n = q_1 q_2 q_3 \cdots q_s - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

ou

$$n = m - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s,$$

e, como $p_1 q_2 q_3 \cdots q_s$ é um número positivo, n é menor do que m.

Finalmente, vamos mostrar que o número natural n tem duas fatorações distintas. Para isto, olhemos como n foi introduzido, a saber

$$n = (q_1 - p_1)\, q_2 q_3 \cdots q_s.$$

Cada um dos fatores $q_2, q_3, \ldots, q_s$ é um primo mas, o primeiro fator $q_1 - p_1$, não é, necessariamente, um primo. Se $q_1 - p_1$ fosse decomposto em fatores primos, teríamos uma decomposição de n em primos que *não incluiria o primo p_1 como um dos fatores*. Para ver isto, observemos, inicialmente, que p_1 não é nenhum dos primos $q_2, q_3, \ldots, q_s$, como foi visto na parte I da demonstração. Em segundo lugar, independentemente de como $q_1 - p_1$ seja decomposto em primos, o primo p_1 não poderia ser um fator, pois, se p_1 fosse um dos fatores na decomposição de $q_1 - p_1$, então p_1 seria um divisor de $q_1 - p_1$. Isto é, teríamos

$$q_1 - p_1 = p_1 b,$$

onde b é o quociente da divisão de $q_1 - p_1$ por p_1. Isto levaria às equações

$$q_1 = p_1 + p_1 b \qquad \text{e} \qquad q_1 = p_1(1 + b)$$

podendo esta última ser interpretada como uma afirmação de que p_1 é um divisor de q_1, o que é impossível, pois nenhum primo pode ser divisor de outro primo.

Em seguida vamos mostrar que n pode ser decomposto em fatores primos de modo que p_1 *seja um dos fatores*. Para tanto, retornemos a uma das equações anteriores

$$n = m - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s,$$

e substituamos m pelo produto

$$m = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$$

obtendo

$$n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r - p_1 q_2 q_3 \cdots q_s$$

$$= p_1 (p_2 p_3 \cdots p_r - q_2 q_3 \cdots q_s).$$

A parte entre parêntesis não é, necessariamente, um número primo; mas quando for decomposto em primos, teremos uma decomposição de n em fatores primos que incluirá o primo p_1. Exibimos, assim, duas decomposições de n em fatores primos, ou melhor, dois processos para obter tais decomposições, uma, sem o fator primo p_1 e outra, com este fator. Em outras palavras, o número n, que é menor do que m, tem duas decomposições distintas em fatores primos. Isto completa a demonstração.

PROVA DE CANTOR DA EXISTÊNCIA DE NÚMEROS TRANSCEDENTES

No Capítulo 7 demonstramos a existência de números transcendentes, exibindo um deles. Neste apêndice, usando um método totalmente diferente, vamos não só demonstrar a existência de números transcendentes, mas também provar que existe uma infinidade deles. Na verdade vamos mostrar que, em certo sentido, existem mais números transcendentes do que algébricos.

De início, vamos deixar bem claro que nós nos restringiremos a números algébricos *reais* e a números transcendentes *reais*. As raízes de $x^2 + 1 = 0$, por exemplo, são números algébricos mas não são reais. Os resultados a que vamos chegar, bem como suas demonstrações, são válidos também para números complexos mas, restringindo nossa atenção aos números reais, evitaremos pequenas complicações.

Entenderemos por conjunto S qualquer coleção de objetos claramente definidos e distinguíveis. Estes objetos são chamados elementos de S. Um conjunto S pode ser finito como, por exemplo, o conjunto dos números naturais primos menores do que 20:

$$S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\};$$

ou pode ser infinito como, por exemplo, o conjunto de todos os números naturais

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Um conjunto infinito se diz enumerável se os seus elementos puderem ser escritos em forma de uma seqüência

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots ,$$

de modo que qualquer elemento do conjunto seja um termo da seqüência. Por exemplo, o conjunto dos números naturais pares pode ser escrito como

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots,$$

uma seqüência em que o n-ésimo termo é $2n$ e portanto este conjunto é enumerável.

O conjunto de todos os inteiros é enumerável pois pode ser escrito em forma de seqüência:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots .$$

Há outras maneiras de escrever este conjunto em forma de seqüência, mas uma só maneira é suficiente para mostrar que o conjunto é enumerável.

Para concluirmos que um conjunto é enumerável não é necessário que conheçamos uma fórmula específica para o n-ésimo termo de uma seqüência. Por exemplo, o conjunto dos números primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

é enumerável, apesar de não conhecermos o valor exato do centésimo-milionésimo primo. É suficiente sabermos que existe um tal primo para que possamos conceber uma ordem seqüencial para o conjunto todo.

A seguir vamos provar que o conjunto de todos os números racionais é enumerável. Observemos que qualquer número racional é raiz de uma equação linear $ax + b = 0$, com coeficientes inteiros a e b. Além do que, sem perda de generalidade, podemos supor a positivo. Por exemplo, o número racional $3/5$ é raiz de $5x - 3 = 0$. Diremos que o *índice* da equação $ax + b = 0$ é

$$1 + a + |b|$$

de onde se vê que o índice de uma equação é um inteiro positivo. Por exemplo, a equação $5x - 3 = 0$ tem índice 9. Não existe equação de índice 1 e somente uma de índice 2, a saber $x = 0$. A tabela C1 contém todas as equações lineares com índices até 5. Os números racionais, em ordem crescente, raízes das equações da tabela C1, também podem ser tabelados como se vê na Tabela C2.

TABELA C1

Índice	Equações
2	$x = 0$
3	$2x=0$, $x+1=0$, $x-1=0$
4	$3x=0$, $2x+1=0$, $2x-1=0$, $x+2=0$, $x-2=0$
5	$4x=0$, $3x+1=0$, $3x-1=0$, $2x+2=0$, $2x-2=0$, $x+3=0$, $x-3=0$

TABELA C2

Índice	Números Racionais Introduzidos
2	0
3	-1, +1
4	$-2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2$
5	$-3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3$

É claro que, para cada índice j, existe apenas um número finito de equações lineares. Existem, de fato, $2j - 3$ equações de índice j (o número em si não é importante). Assim, cada

vez que o índice aumentar, somente um número finito de novos números racionais será introduzido. Portanto podemos escrever os números racionais na forma de seqüência

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3,\ \ldots\ ,$$

escrevendo inicialmente as raízes das equações de índice 2, em seguida as raízes das equações de índice 3 e assim por diante, tomando índices crescentes, um de cada vez. Como todos os números racionais vão aparecer na seqüência segue-se que os números racionais são enumeráveis.

Praticamente a mesma demonstração pode ser usada para provar que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Mas, inicialmente, precisaremos saber algo a respeito de quantas raízes uma equação algébrica pode ter. Convém lembrar que número algébrico é aquele que satisfaz uma equação do tipo

$$(1) \qquad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros. Podemos supor a_n positivo pois, se fosse negativo, multiplicaríamos a equação por -1, sem que isto afetasse as raízes.

Teorema C.1. *Qualquer equação da forma (1) tem no máximo n raízes distintas.*

Demonstração. Suponhamos, ao contrário, que a eq.(1) tenha $n + 1$ raízes distintas, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$. Vamos usar o Teorema 7.2 (capítulo 7) ou, melhor, uma ligeira variação daquele resultado. A demonstração do Teorema 7.2 assegura que $x - \beta$ será um fator de $f(x)$ se β for uma raiz de $f(x) = 0$, quer β seja, ou não, um número racional. Se β for irracional, o quociente $q(x)$ terá coeficientes irracionais, mas isto não importa aqui. No contexto atual, vemos que $x - \beta_1$ é um fator de $f(x)$ com quociente, digamos, $q_1(x)$

$$f(x) = (x - \beta_1)\ q_1(x).$$

Como β_2 é uma outra raiz de $f(x) = 0$, vemos que β_2 tem que ser uma raiz de $q_1(x) = 0$ e, assim, $x - \beta_2$ é um fator de $q_1(x)$, com quociente, digamos, $q_2(x)$:

$$q_1(x) = (x - \beta_2)\ q_2(x),$$

$$f(x) = (x - \beta_1)\ q_1(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ q_2(x).$$

Continuando este processo com $\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_n$, observamos que $f(x)$ pode ser fatorado em

$$(2) \qquad f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3)\ldots(x - \beta_n)q_n(x).$$

Mas $f(x)$ tem grau n, portanto $q_n(x)$ tem que ser uma constante; de fato, $q_n(x)$ tem que ser a_n para que a fatoração esteja de

acordo com a eq. (1).

Consideremos agora a raiz β_{n+1} que é diferente de todas as outras raízes. Pelo fato de ser $f(\beta_{n+1}) = 0$, segue-se de (2) que

$$(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)(\beta_{n+1}-\beta_3)\ldots(\beta_{n+1}-\beta_n)a_n = 0,$$

o que é impossível, pois o produto de fatores não nulos não pode ser zero. Assim, o Teorema C.1 está demonstrado.

Teorema C.2. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Dizemos que o *índice* da eq. (1) é o número

$$n+a_n+|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\ldots+|a_2|+|a_1|+|a_0|.$$

O índice é um inteiro positivo e sua definição é uma generalização direta da definição de índice de uma equação linear. Novamente, podemos tabelar todas as equações de índices pequenos, como se vê na Tabela C3.

TABELA C3

Índice	Equações
2	$x = 0$
3	$x^2=0$, $2x=0$, $x+1=0$, $x-1=0$
4	$x^3=0$, $2x^2=0$, $x^2+1=0$, $x^2-1=0$, $3x=0$, $2x+1=0$, $2x-1=0$, $x+2=0$, $x-2=0$

Como no caso das equações lineares, faremos a listagem de todos os novos números algébricos provenientes das equações da Tabela C3. Se, para cada índice, dispusermos os números em ordem crescente, obteremos a seqüência

$$(3)\quad \begin{array}{l} 0;\ -1,1;\ -2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2;\ -3,-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ -\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ -\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2},3;\ -4,\ldots. \end{array}$$

O número 0 vem da única equação de índice 2, os números -1 e 1, das equações de índice 3, os números -2, -1/2, 1/2, 2, das equações de índice 4, e assim por diante. Para qualquer índice h fixo, o número de equações é finito, porque o grau n e os coeficientes $a_n,\ldots,a_0$ estão restritos a um conjunto finito de inteiros. Além disso, pelo Teorema C.1, sabemos que o número máximo de raízes de cada equação é n. Portanto, todos os números reais algébricos vão aparecer na seqüência (3). Deve-se observar, no entanto, que à medida que os índices vão aumentando, apesar de podermos em cada etapa escrever todas as equações para qualquer índice dado, não poderemos continuar escrevendo as raízes específicas como o estivemos fazendo com os primeiros números da seqüência (3).

Do Teorema C.2 vamos querer tirar mais uma conclusão: a de que o conjunto dos números reais algébricos, entre 0 e 1, é enumerável. Isto é conseqüência de um princípio geral, muito simples, que vamos formular como um teorema a respeito dos assim chamados subconjuntos. Um conjunto M é um subconjunto do conjunto S se todo elemento de M for elemento de S.

Teorema C.3. *Um subconjunto infinito de um conjunto enumerável, é enumerável.*

Demonstração. Seja M um subconjunto infinito de um conjunto enumerável S, digamos, $S = \{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\}$. Seja a_{i_1} o primeiro elemento de S que também esteja em M, a_{i_2}, o segundo, e assim por diante. Então M será o conjunto

$$M = \{a_{i_1},\ a_{i_2},\ a_{i_3},\ \ldots\}$$

que, obviamente, é enumerável.

Até aqui, todos os conjuntos infinitos considerados foram enumeráveis. Vamos analisar agora, em contraste, um conjunto que não é enumerável.

Teorema C.4. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Em virtude do Teorema C.3, será suficiente provar este fato para números reais entre 0 e 1; especificamente, para números reais x, satisfazendo $0 < x \leq 1$, de modo que 1 esteja incluído e 0, excluído. Suponhamos que o conjunto dos números reais entre 0 e 1 fosse enumerável, digamos

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \ldots\ .$$

Escrevamos estes números em forma decimal, evitando representações decimais finitas pelo uso da forma infinita periódica em tais casos (veja Secção 2.5). Por exemplo, o número 1/2 será escrito como 0,499999... e não 0,5. Teríamos

$$r_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\cdots,$$

$$r_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\cdots,$$

$$r_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\cdots,\text{etc.}$$

Construiremos, agora, um número

$$\beta = 0,b_1b_2b_3b_4\cdots,$$

da seguinte maneira. Seja b_1 qualquer algarismo entre 1 e 9, porém diferente de a_{11}. Analogamente, seja b_2 qualquer algarismo, não nulo, diferente de a_{22}. Em geral, seja b_h qualquer algarismo não nulo, diferente de a_{hh}. Então o número β é diferente de r_1 (pois eles diferem na primeira casa decimal), é diferente de r_2 (pois eles diferem na segunda casa decimal) e, em geral, β é diferente de r_k (pois eles diferem na k-ésima casa decimal). Portanto β é diferente de cada um dos r's. Mas β é um número real entre 0 e 1 e obtemos assim uma contradição.

Deste teorema podemos concluir que, sendo enumeráveis os números algébricos entre 0 e 1 e não enumeráveis os números reais entre 0 e 1, devem existir números reais que não sejam algébricos. Estes são os números transcendentes, cuja existência fica assim demonstrada.

Teorema C.5. *O conjunto dos números reais transcendentes não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que os números reais transcendentes fossem enumeráveis, digamos,

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \ldots\ .$$

Como, pelo Teorema C.2, os números reais algébricos são enumeráveis, digamos, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots,$ o conjunto dos números reais poderia ser escrito em forma de seqüência:

$$t_1,\ a_1,\ t_2,\ a_2,\ t_3,\ a_3,\ t_4,\ a_4,\ \ldots$$

contradizendo o Teorema C.4. Havendo uma contradição, o Teorema C.5 está demonstrado.

Finalmente, observemos que os Teoremas C.2 e C.5 podem ser interpretados como dizendo que existem "mais" números transcendentes do que algébricos. Os números algébricos podem ser apresentados como termos de uma seqüência infinita, mas existem números transcendentes em demasia para uma tal representação seqüencial.

Problemas - Lista 29

1. (a) Escreva todas as equações lineares de índice 6 e (b) escreva todas as raízes destas equações que não sejam raízes de equações lineares de índice menor.

2. Demonstre que o conjunto dos inteiros ímpares, positivos e negativos, é enumerável.

3. Demonstre que o conjunto dos polinômios $a + bx^4$, onde a e b são números naturais quaisquer, é enumerável.

4. Escreva todas as equações de índice 5 e confira a seqüência (3) até o elemento 3.

5. Demonstre que o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{3}$, onde a e b são números racionais quaisquer, é enumerável.

6. Demonstre: se um conjunto A puder ser separado em dois conjuntos enumeráveis B e C, então A será enumerável.

7. Demonstre que o conjunto dos números reais estritamente entre 0 e 0,1 não é enumerável.

8. Demonstre que o conjunto dos números irracionais não é enumerável.

Problemas Selecionados

Respostas e Sugestões

Lista 1

1. (a) Falso: 1 + 1 = 2.
   (b) Verdadeiro.
   (c) Falso: 1 - (-1) = 2.
   (d) Verdadeiro.
   *(e) Falso: $2^1 + 2^2 = 6$, e 6 não é uma potência inteira de 2.

2. Oito, a saber, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

3. Cinco, a saber, 1, 2, 4, 8, 16.

4. Quatro.

5. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

*6. **Sugestão**: Ache uma boa notação para números que sejam múltiplos exatos de um número dado d.

Lista 2

1. Sim; $q = -7$.
2. Sim; $q = -7$.
3. Sim; $q = 7$.
4. Não.
5. Sim; $q = -35$.
6. Sim; $q = 0$.
7. Não.
8. Sim; $q = 1$.
9. Não, porque q não é único.
10. Sim.
11. Sim.

Lista 3

1. (a), (b) e (f) são verdadeiros; (c), (d) e (e) são falsos.
2. Verdadeiro em todos os casos.
3. (a), (c) e (d) são verdadeiros; (b) e (e) são falsos.
4. (a), (b), (c) e (d) são verdadeiros; (e) é falso.

Lista 4

6. (a) não fechado, (b) fechado, (c) fechado, (d) não fechado, (e) fechado, (f) fechado, (g) fechado.

Lista 6

1. (a) 0,25; (b) 0,015; (c) 0,8025; (d) 0,0112; (e) 2,816; (f) 1,2596.

Lista 7

2. (a) Falso, por exemplo, no caso $b = 10$;
   (b) Verdadeiro;
   (c) Falso, por exemplo, no caso $b = 10$;
   (d) Falso, por exemplo, no caso $b = 7$;
   (e) Falso, por exemplo, no caso $b = 7$;
   (f) Verdadeiro.
3. (a) Falso, por exemplo, no caso da fração 3/6;
   (b) Verdadeiro;
   (c) Falso, por exemplo, no caso da fração 3/6.

4. Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
5. (b) Sim.

Lista 8

1. (a) 1/9; (b) 17/3; (c) 3706/9900 = 1853/4950; (d) 9978/9990 = 1663/1665; (e) 1/9900; (f) 1.

Lista 9

1. (a) 0,12; (b) 0,3; (c) 4,8; (d) 10,0.
2. (a) 0,72999...; (b) 0,0098999...; (c) 12,999... .
3. Números racionais a/b, (irredutíveis) com a propriedade de b não ser divisível por primos diferentes de 2 e de 5, com $a \neq 0$.
4. Nenhum.

Lista 10

7. Racional

Lista 11

1. $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$ servem.
2. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ servem.
3. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ servem.
4. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ servem.
5. $\sqrt{3}$ e $1/\sqrt{2}$ servem.

Lista 12

1. (a) $n = 3$, $c_3 = 15$, $c_2 = -23$, $c_1 = 9$, $c_0 = -1$;

   (b) $n = 3$, $c_3 = 3$, $c_2 = 2$, $c_1 = -3$, $c_0 = -2$;

   (c) $n = 3$, $c_3 = 2$, $c_2 = 7$, $c_1 = -3$, $c_0 = -18$;

   (d) $n = 4$, $c_4 = 2$, $c_3 = 0$, $c_2 = -1$, $c_1 = -3$, $c_0 = 5$;

   (e) $n = 5$, $c_5 = 3$, $c_4 = 0$, $c_3 = -5$, $c_2 = 6$, $c_1 = -12$, $c_0 = 8$;

   (f) $n = 4$, $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = -3$, $c_1 = -5$, $c_0 = 9$.

2. (a) sim; (b) sim; (c) sim; (d) não; (e) sim; (f) não.

4. **Sugestão.** Multiplique a equação pelo produto $b_3b_2b_1b_0$.

Lista 13

2. **Sugestão.** Use o Teorema 4.1 e um dos resultados do problema 1

7. **Sugestão.** 2/2 é uma raiz de $x^2 - 1 = 0$, por exemplo.

Lista 15

1. (a) **Sugestão.** Substitua Θ por 40^0 na eq. (5) e use $\cos 120^0 = -1/2$.

   (b) **Sugestão.** Use o resultado do problema 1(a) e a eq. (8).

   (c) **Sugestão.** Use a eq. (8), parte 1, com $\Theta = 10^0$.

   (d) **Sugestão.** Use o resultado do problema 1(a) e a identidade $\cos\Theta = \text{sen}(90^0 - \Theta)$.

3. (a) **Sugestão.** Substitua A por 3Θ e B por 2Θ na eq. (1) e use as eqs. (3), (4), (5) e (7).

4. (a), (b), (c), (d), (i) e (k) são racionais.

Lista 16

1. (a) **Sugestão.** Use $\cos 30^0 = \sqrt{3}/2$.

   (b) **Sugestão.** Use $\cos 45^0 = \sqrt{2}/2$.

   (d) **Sugestão.** Use o fato de $\cos 40^0$ ser irracional e $\cos 2.35^0 = \cos 70^0 = \cos(90^0 - 20^0) = \text{sen } 20^0$, etc.

3. (b) Sim.

Lista 17

3. **Sugestão.** Lembre que $\log m + \log n = \log mn$.

4. **Sugestão.** Use, entre outras coisas, o exemplo 3 do texto.

Lista 18

1. (a) **Sugestão.** É uma raiz de $x^2 - 3 = 0$.

   (b) **Sugestão.** É uma raiz de $x^3 - 5 = 0$.

   (c) **Sugestão.** É uma raiz de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Veja eq. (5) do Capítulo 4.

   (d) **Sugestão.** Veja eq. (6) do Capítulo 5.

Lista 21

5. (a) Falso, por exemplo, se $r = -2$ e $s = -3$;
   (b) Falso, por exemplo, se $r = 4$, $s = 3$ e $c = -2$;
   (c) Verdadeiro;
   (d) Verdadeiro;
   (e) Verdadeiro;
   (f) Falso, por exemplo, se $\lambda = 2/5$;
   (g) Verdadeiro.
6. $-10 < \lambda < 10$.
8. (b) Sim. A diferença é que $u - v$ pode ser 0 em (b) mas não em (a).

Lista 22

2. (a) 1, (b) 3, (c) 4, (d) 6, (e) 5, (f) 7, (g) 3, (h) 31, (i) -2, (j) -22.

Lista 23

1. 2/1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, 10/6, 12/7, 14/8, 16/9, 17/10.
2. 3/1, 6/2, 9/3, 13/4, 16/5, 19/6, 22/7, 25/8, 28/9, 31/10.
3. **Sugestão.** Deduza isto do Teorema 6.3.

*5. **Sugestão.** Considere o caso em que $\lambda = \sqrt{2}$ e $n = 4$ e prove que não existe nenhuma fração $m/4$, irredutível (isto é, com m ímpar), tal que

$$-\frac{1}{8} < \lambda - \frac{m}{4} < \frac{1}{8}.$$

Lista 24

1. $n = 4$, $m = 7$.

2.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)
n	2	3	4	4	1	3	5	5	5	5	1	1	1	7
m	3	5	7	7	1	4	7	7	7	7	3	3	3	22

Lista 25

1. **Sugestão.** Considere o inteiro imediatamente maior do que λ e o inteiro imediatamente menor.
2. **Sugestão.** Mostre que a exceção é m/n com $n = 1$, onde m é aquele inteiro, imediatamente maior ou menor do que λ, que estiver mais afastado de λ.
3. (a) 3/2 e 4/3 servem.
   (b) 3/2 e 5/3 servem.
   (c) 7/3 e 9/4 servem.
4. (a) Todos.
   (b) 1/1, e também 14/10 desde que seja tomado na forma irredutível 7/5.
5. (a) 3/1, 31/10, 314/100; (b) 3/1.

*6. **Sugestão.** Demonstre que as desigualdades do Teorema 6.5 são falsas para $\lambda = 3/5$ e qualquer m/n com $n > 5$, da seguinte maneira: $\lambda - m/n$ é positivo ou negativo. Se positivo, mostre que é, no mínimo, $1/5n$; se negativo, no máximo, $-1/5n$.

*7. (a) **Sugestão.** Use o Teorema Fundamental da Aritmética, como dado no Apêndice B, para demonstrar que os números racionais dados não são iguais.

(b) **Sugestão.** Prove que as desigualdades do Teorema 6.5 não podem permanecer válidas para números racionais m/n com n maior do que b.

Lista 26

1. (b) Não existem.
2. (b) 1/1, 2/1, 3/2.
3. (b) 1/1, 2/1.

Lista 27

1. 2, 2, 8 e 10^{-1}.
2. Não.
4. (b) $|x-7| = x-7$ se $x \geq 7$; $|x-7| = -x+7$ se $x \leq 7$.
5. (a) $x = -1$; (b) $x = 2$; (c) $x = 7$ e $x = -7$; (d) todos os valores de x.

Lista 28

2. $\alpha^7 - \beta^7 = (\alpha-\beta)(\alpha^6+\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2+\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4+\alpha\beta^5+\beta^6)$.
3. **Sugestão.** Qualquer raiz de $f(x) = 0$ é também uma raiz de $f(x)g(x) = 0$.

Lista 29

1. (a) $5x = 0$, $4x \pm 1 = 0$, $3x \pm 2 = 0$, $2x \pm 3 = 0$, $x \pm 4 = 0$;

   (b) -4, $-3/2$, $-2/3$, $-1/4$, $1/4$, $2/3$, $3/2$, 4.
2. Por exemplo, 1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, 9, -9, ...
3. **Sugestão.** Defina o índice de $a+bx^4$ como sendo $a+b$; observe, então, que existe apenas um número finito de polinômios com um dado índice, qualquer que ele seja; em seguida, enumere-os.
4. $x^4=0$, $2x^3=0$, $x^3\pm1=0$, $x^3\pm x=0$, $x^3\pm x^2=0$, $3x^2=0$,

   $2x^2\pm1=0$, $x^2\pm2=0$, $2x^2\pm x=0$, $x^2\pm x\pm1=0$, $x^2\pm2x=0$,

   $4x=0$, $3x\pm1=0$, $2x\pm2=0$, $x\pm3=0$.
5. **Sugestão.** Todos estes números são algébricos; use o Teorema C.3.
6. **Sugestão.** Seja $b_1, b_2, b_3, \ldots$ uma listagem seqüencial dos elementos de B, e seja $c_1, c_2, c_3, \ldots$ uma tal listagem dos elementos de C; então A pode ser escrito seqüencialmente como

$$b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \ldots$$

7. **Sugestão.** Siga a demonstração do Teorema C.4; mas os números $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots$ são todos zero neste contexto. Construa o número que não está na lista, escolhendo $b_1 = 0$, $b_2 \neq a_{12}$ e $b_2 \neq 0$, $b_3 \neq a_{23}$ e $b_3 \neq 0$, e, em geral, $b_i \neq a_{i-1,i}$ e $b_i \neq 0$.

ÍNDICE ALFABÉTICO