1ª Prova de Análise na Reta

27/08/2018

Essa prova é composta de duas partes:

1. Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30. Faça duas questões de topologia e duas de limites/continuidade.
2. Enviar a resolução de todas as questões até às 24h de domingo, 02/set, para o endereço: analise.na.reta.ufpr@gmail.com

Topologia da Reta

1. Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos abertos e denote $F_1 = \mathbb{R} - A_1$. Prove que:
   a. $A_1 \cup A_2$ é aberto
   b. $F_1 - A_2$ é fechado.
2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado não vazio e $s = \sup X$.
   a. Prove que $s \in \overline{X}$;
   b. Dê um exemplo no qual s não seja ponto de acumulação de X.
3. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família indexada de conjuntos compactos.
   a. Prove que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é um conjunto compacto;
   b. Dê um exemplo no qual $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ não é um conjunto compacto.

Limites e Continuidade

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M > 0$, mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ diferente de a.
5. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $a \in D'$ e $g : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
6. Escreva a definição precisa de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. A seguir use sua definição para provar que
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-4} = +\infty.$$
7. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto fixado e considere as funções $f, g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ e $g(x) = \dfrac{x-a}{|x-a|}$. Mostre que f possui uma descontinuidade removível em $x = a$ e que g possui uma descontinuidade do tipo salto em $x = a$.
8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $f(0) = 0$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ e descontínua em $x = 0$