3ª Prova de Fundamentos de Análise

14/06/2018

- ◇ Faça apenas quatro questões (duas de sequências e duas de séries);
- ◇ As notas serão divulgadas no endereço: www.ufpr.br/∼akirilov.

Sequências

1. Usando apenas a definição de limite infinito, prove que $\lim(2n^2 + 1) = +\infty$.
2. Se (a_n) é uma sequência limitada e $\lim b_n = +\infty$, mostre que $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.
3. Prove que toda sequência convergente é de Cauchy.
4. Defina $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prove que (a_n) é uma sequência convergente e calcule seu limite.

Séries

5. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa
6. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente e a sequência (b_n) é limitada, prove que a série $\sum(a_n b_n)$ é absolutamente convergente.
7. Dados $a, b > 0$, use o critério da comparação para analisar a convergência das séries:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{n^3 + b}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an + b}.$$

8. Verifique se as séries abaixo são absolutamente e/ou condicionalmente convergentes.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n}\ , \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1}.$$