11. Prove que se (a_n) é uma seqüência não crescente e $\sum a_n$ converge, então $na_n \to 0$. Isso pode não ser verdade se (a_n) oscilar, como ilustra o exercício seguinte. Observe que a condição $na_n \to 0$ não é suficiente para a convergência da série; um contra-exemplo é a série $\sum 1/(n \log n)$, que é divergente. (Veja o Exemplo 3.18, p. 89).

12. Construa uma série convergente de termos positivos $\sum a_n$ tal que na_n não tenda a zero.

Sugestões

3. $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$.

4. Conseqüência de um dos dois exercícios anteriores.

5. a) e b) dominam a série harmônica. Em c) e e), $n^{3/2}a_n \to c > 0$. Algo parecido em d). Em f), $0 < 2^n a_n < 2 + |\text{sen}^2\, 3n| < 3$, logo, $a_n < 3/2^n$. g) Diverge. Observe que se $k > 0$, $\log n < n^{1/k}$ a partir de um certo N. h) Converge, pois $\log n > 2$ a partir de certo N. i) Converge. No caso da série em k), observe que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

7. $(a^n - b^n)^{-1} = (1/a)^n[1 - (b/a)^n]^{-1}$.

11. Sendo S a soma da série, $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_{2n} \geq na_{2n}$. Isso permite provar o resultado desejado para n par. Para n ímpar observe que $(2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n}$.

12. Tome uma série convergente (por exemplo, $\sum q^n$, com $0 < q < 1$) e substitua por $1/n$ uma infinidade de seus termos a_n, tomados cada vez mais espaçadamente para não destruir a convergência (por exemplo, substitua os termos de ordem $n = k^2$ por $1/n = 1/k^2$).

Teste da razão

Uma importante conseqüência do teste de comparação é o chamado *teste da razão* ou *teste de d'Alembert* que consideramos a seguir.

3.14. Teorema (teste da razão). *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos tal que existe o limite L do quociente a_{n+1}/a_n. Então, a série é convergente se $L < 1$ e divergente se $L > 1$, sendo inconclusivo o caso em que $L = 1$.*

Demonstração. Seja c um número compreendido entre L e 1. Supondo $L < 1$, esse número c também será menor que 1. A partir de um certo índice N teremos $a_{n+1}/a_n < c$, ou seja, $a_{n+1} < a_n c$. Daqui obtemos as desigualdades

$$a_{N+1} < a_N c,\ a_{N+2} < a_{N+1}c < a_N c^2,\ a_{N+3} < a_{N+2}c < a_N c^3, \ldots;$$

em geral, $a_{N+j} < a_N c^j$, $j = 1,\ 2, \ldots$. Isso mostra que a partir do índice $N+1$ a série dada é majorada pela série geométrica $a_N \sum c^j$, que é convergente, pois $0 < c < 1$. Então a série original também é convergente, pelo teste de comparação.

O raciocinio, no caso $L > 1$, é mais simples ainda, pois então, a partir de um certo N, $a_{N+1} > a_N$, $a_{N+2} > a_{N+1} > a_N$; em geral, $a_{N+j} > a_N$, provando que o termo geral a_{N+j} não tende a zero, logo a série diverge.

A demonstração do teorema deixa claro que nem precisa existir o limite nele referido; basta que, a partir de um certo índice N, tenhamos sempre $a_{n+1}/a_n \leq c < 1$ ou sempre $a_{n+1}/a_n \geq 1$.

3.15. Corolário. *A série de termos positivos $\sum a_n$ é convergente se a partir de um certo índice vale sempre $a_{n+1}/a_n \leq c < 1$; e divergente se a partir de um certo índice vale sempre $a_{n+1}/a_n \geq 1$.*

3.16. Exemplos. A convergência de cada uma das três séries dadas em (3.4) (p. 85) pode ser estabelecida facilmente pelo teste da razão, sem precisar descobrir de antemão como os termos dessas séries tendem a zero. Aliás, provando-se, pelo teste da razão, que essas séries convergem, teremos provado o resultado (2.10) (p. 61). Consideremos, como ilustração, a terceira das séries em (3.4), para a qual $a_n = n!/n^n$, logo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

donde segue a convergência da série. O cálculo desse limite no caso das outras duas séries resulta em $1/a$ e zero, respectivamente; é um cálculo fácil, como o leitor pode verificar.

Observe que o teste da razão nada nos diz se $\lim a_{n+1}/a_n = 1$. É o que acontece no caso das séries $\sum 1/n$ e $\sum 1/n^2$, a primeira divergente e a segunda convergente. Em ambos os casos a_{n+1}/a_n tem limite 1; no entanto, a primeira diverge e a segunda converge.

Exercícios

Teste cada uma das séries seguintes, verificando se converge ou não:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$, $0 < a < 1$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$, $a > 0$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{2^{n^2}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!(2+\operatorname{sen} n^2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}$.
8. Dada uma série convergente de termos positivos $\sum a_n = S$, prove que, se a partir de um certo índice N, $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$, então $S - S_n < a_N q^{n+1-N}/(1-q)$ para $n > N$.

9. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, esta última convergente. Suponhamos que exista N tal que $n > N \Rightarrow a_{n+1}/a_n \le b_{n+1}/b_n$. Prove que $\sum a_n$ converge.
10. Obtenha a primeira parte do Teorema 3.14 como conseqüência do exercício anterior.

Sugestões

1. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (1+1/n)^b a.$ 2. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}.$ 3. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$

4. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n^2}a}{2^{(n+1)^2}} = \dfrac{a}{(2n+1)}.$

5. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a[(n+1)!]^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} = \dfrac{a(n+1)^2}{2^{(2n+1)}}.$

6. $0 < a_n \le \dfrac{2^n n!}{5.8\ldots(3n-1)} = b_n, \quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2(n+1)}{3n+2} \to \dfrac{2}{3}.$

7. $a_n \ge \dfrac{3^n n!}{5.7\ldots(2n-1)} = b_n, \quad \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3(n+1)}{2n+1} \to \dfrac{3}{2}.$

9. Escreva a desigualdade do enunciado para os índices N, $N+1, \ldots, n$ e multiplique, membro a membro, as desigualdades obtidas.

10. Sendo $L < c < 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le c \le \dfrac{c^{n+1}}{c^n}$, a partir de um certo N.

O teste da integral

Um outro teste de convergência de séries de muita utilidade é o chamado teste da integral, porque baseado na comparação da série com a integral de uma função.

3.17. Teorema. *Seja $f(x)$ uma função positiva, decrescente e $a_n = f(n)$. Então*

$$f(2)+\ldots+f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1)+\ldots+f(n-1). \tag{3.5}$$

Em conseqüência, a série $\sum a_n$ converge ou diverge, conforme a integral que aí aparece seja convergente ou divergente, respectivamente, com $n \to \infty$.

Demonstração. Imediata, pois a desigualdade em (3.6) é obtida da soma de

$$f(j) < \int_{j-1}^j f(x)dx < f(j-1),$$

j variando de 2 a n.

3.18. Exemplos. A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ é divergente, pois

$$\int_2^n \frac{dx}{x\log x} = \log\log x\Big|_2^n \to \infty.$$

É interessante observar que se aumentarmos, por pouco que seja, o logaritmo no denominador, obteremos uma série convergente. Assim, dado $\varepsilon > 0$ por pequeno que seja,

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\log\ x)^{1+\varepsilon}} = \frac{-1}{\varepsilon(\log x)^\varepsilon}\bigg|_2^n \to \frac{1}{\varepsilon(\log 2)^\varepsilon},$$

donde concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$ é convergente.

Exercícios

1. Use o teste da integral para mostrar que a série harmônica é divergente.
2. Faça o mesmo para mostrar que a série $\sum 1/n^x$ é convergente se $x > 1$ e divergente se $x < 1$.
3. Estabeleça as seguintes desigualdades:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{2}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}.$$

4. Mostre, pelo teste da integral, que as séries seguintes são convergentes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n}.$$

Neste último exemplo k é um número real qualquer.

5. Estabeleça a convergência da série $\sum (e/n)^n$ e prove a convergência da integral

$$\int_1^\infty (e/x)^x dx.$$

6. Estabeleça a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.
7. Sendo $f(x)$ uma função crescente em $x \geq 1$, prove que

$$f(1) + \ldots + f(n-1) < \int_1^n f(x)dx < f(2) + \ldots + f(n).$$

8. Fazendo $f(x) = \log x$ no exercício anterior, prove que

$$e^{1-n} < \frac{n!}{n^n} < ne^{1-n},$$

donde segue, em particular, que $\sqrt[n]{n!}/n \to 1/e$.

9. Verifique que o teste da razão não permite saber se a série $\sum e^n n!/n^n$ converge ou não. Prove que esta série é divergente, usando o resultado do exercício anterior.

Sugestões

3. Integre, em cada caso, uma função $f(x)$ apropriada.

5. A convergência da série pode ser obtida como conseqüência da convergência das duas últimas séries em (3.4) (p. 85), pois $(e/n)^n = (e^n/n!)(n!/n^n)$.
6. Basta provar que é convergente a integral, de 2 a ∞, da função
$$f(x) = (\log x)^{-\log x} = e^{-(\log x)\log\log x} = e^{-g(x)},$$
onde $g(x)$ tem significado óbvio. (É fácil verificar que $f(x)$ é decrescente a partir de um certo x_0, pois $g'(x) = x^{-1}(\log\log x + 1) > 0$ a partir de um certo x_0.) Para isso fazemos a substituição $y = \log x$, donde
$$\int_2^\infty f(x)dx = \int_{\log 2}^\infty (e/y)^y dy,$$
integral esta que sabemos ser convergente pelo exercício anterior.

Convergência absoluta e condicional

Diz-se que uma série $\sum a_n$ *converge absolutamente*, ou é *absolutamente convergente*, se a série $\sum |a_n|$ é convergente. Pode acontecer, como veremos adiante, que $\sum a_n$ seja convergente e $\sum |a_n|$ divergente, em cujo caso dizemos que a série $\sum a_n$ é *condicionalmente convergente*.

3.19. Teorema. *Toda série absolutamente convergente é convergente. Mais do que isso, é comutativamente convergente, isto é, a soma da série dada independe da ordem de seus termos.*

Demonstração. Sejam p_r a soma dos termos $a_r \geq 0$ e q_r a soma dos valores absolutos dos termos a_r negativos, onde, em ambos os casos, $r \leq n$. Então, as reduzidas das séries $\sum |a_n|$ e $\sum a_n$ são dadas por
$$T_n = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = p_n + q_n \tag{3.6}$$
e
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = p_n - q_n, \tag{3.7}$$
respectivamente. As seqüências (T_n), (p_n) e (q_n) são não decrescentes, a primeira das quais converge, por hipótese. Seja T seu limite. Temos que $p_n \leq T_n \leq T$ e $q_n \leq T_n \leq T$, donde concluímos que (p_n) e (q_n) convergem. Sejam p e q seus respectivos limites. Então S_n também converge: $S_n = p_n - q_n \to p - q$. Isso completa a demonstração da primeira parte do teorema.

Para ver que a soma da série dada independe da ordem de seus termos, basta notar que p_n e q_n são reduzidas de séries de termos não negativos, e as somas dessas séries independem da ordem em que se considerem seus termos, como vimos no Teorema 3.6 (p. 80).

Outro modo de provar a convergência da série utiliza o critério de Cauchy. Para isso observamos que
$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|.$$

Ora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice N tal que $n > N$ acarreta esta última soma ser menor do que ε, logo, o mesmo acontece com a primeira.

3.20. Exemplo. Vamos provar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 3n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}}$$

é absolutamente convergente. Para isso observamos que a partir de $n = 2$ o denominador é positivo e

$$n^2|a_n| = \frac{n^2|\operatorname{sen} 3n^2|}{n^2 - \sqrt{n+9}} \le \frac{n^2}{n^2 - \sqrt{n+9}} \to 1,$$

de sorte que, a partir de um certo N, $n^2|a_n| < 2$ e isso prova que $\sum |a_n|$ é convergente.

Séries alternadas e convergência condicional

Diz-se que uma série é *alternada* quando seus termos têm sinais alternadamente positivos e negativos. Para essas séries vale a recíproca do Teorema 3.1 (p. 77), desde que o valor absoluto do termo geral tenda a zero *decrescentemente*. É o que veremos a seguir.

3.21. Teorema (teste de Leibniz). *Seja (a_n) uma seqüência que tende a ~~zero~~ decrescentemente, isto é, $a_1 \ge a_2 \ge \ldots$, $a_n \to 0$. Então, a série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge. Além disso, o erro que se comete tomando-se uma reduzida qualquer da série como valor aproximado de sua soma é, em valor absoluto, menor ou igual ao primeiro termo desprezado.*

Demonstração. Consideremos separadamente as reduzidas de ordem par e de ordem ímpar da série dada, as quais podem ser escritas assim:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

e

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

por onde vemos claramente que (S_{2n}) é não decrescente e (S_{2n+1}) é não crescente. Além disso, $S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n+1} \le S_{2n+1} \le a_1$, isto é, (S_{2n}) é não decrescente e limitada, portanto, convergente para um certo número S. Este é também o limite da seqüência de reduzidas de ordem ímpar, como se vê passando ao limite em $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Concluímos que a seqüência (S_n) converge para o mesmo número S (Exerc. 3 da p. 62).

Quanto ao erro, observe que as desigualdades

$$S_{2n} \le S \le S_{2n+1} \quad \text{e} \quad S_{2n+2} \le S \le S_{2n+1}$$

nos dão:

$$0 \le S - S_{2n} \le S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$$

e

$$0 \le S_{2n+1} - S \le S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}.$$

Isso prova que $|S_n - S| \le a_{n+1}$ para todo n e conclui a demonstração.

3.22. Exemplo. A série harmônica alternada,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

é convergente, pelo teorema anterior; portanto, condicionalmente convergente, pois a série de módulos, $\sum 1/n$, é a série harmônica que, como sabemos, diverge.

As séries condicionalmente convergentes são, por natureza, vagarosas no convergir. A mudança da ordem de seus termos muda a soma da série e pode mudar tanto que é possível reordenar convenientemente os termos da série para que sua soma seja qualquer número dado de antemão. Esse surpreendente resultado, que discutiremos a seguir, é descrito e demonstrado por Riemann em um de seus trabalhos.

3.23. Teorema. *Se uma dada série $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, seus termos podem ser reordenados de maneira que a série convirja para qualquer número S que se prescreva.*

Demonstração. Com a mesma notação do Teorema 3.19, como $T_n \to \infty$, vemos, por (3.6), que o mesmo ocorre com p_n ou q_n. Mas S_n converge, logo, por (3.7), ambos p_n e q_n tendem a infinito. Agora é fácil ver como reordenar os termos da série para que sua soma seja S: da seqüência a_1, $a_2, \ldots$ vamos tirando elementos positivos, na ordem em que aparecem, e somando-os até obtermos um número maior do que S; em seguida vamos adicionando a esse resultado elementos negativos até obtermos uma soma menor do que S; e voltamos a adicionar elementos positivos, depois negativos, e assim por diante. Como a série original converge, $a_n \to 0$, de sorte que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$. Ora, o reordenamento descrito produz uma série

$$a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ldots + a'_n + \ldots,$$

cujas reduzidas S'_j têm a seguinte propriedade: existe J tal que, sendo $j > J$, S'_j incorpora todos os elementos da série original com índices que vão de 1 até $N+1$, de forma que o último elemento da série original que aparece em S'_j tem índice $n_j > N$; logo, tem valor absoluto menor do que ε. E foi esse elemento que fez a soma S'_j ultrapassar o número S, seja para a direita ou para a esquerda, de sorte que $|S'_j - S| < |a_{n_j}|$. Assim, podemos concluir que

$$j > J \Rightarrow |S'_j - S| < \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração do teorema.

Deste último teorema e do Teorema 3.19 segue facilmente o corolário que enunciamos a seguir.

3.24. Corolário. *Uma condição necessária e suficiente para que uma série seja comutativamente convergente é que ela seja absolutamente convergente.*

Os resultados sobre séries aqui discutidos são os mais freqüentemente usados. Porém, muitos outros existem, principalmente testes de convergência.

Exercícios

Verifique, em cada um dos exercícios seguintes, se a série dada é convergente; e, em sendo, se absoluta ou condicionalmente.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$;

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$;

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k - \operatorname{sen} k}{k\sqrt{k}}$;

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}(2+\sqrt{n})}$;

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$;

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (n!)^{-1/2} \operatorname{sen}(1/3n)$;

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2^n - (-3)^n]}{(2n)! - n!}$;

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \operatorname{sen} k}{1.3.5\ldots(2k-1)}$;

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cos n$;

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(\cos n)}{(n!)^3}$;

Notas históricas e complementares

A origem das séries infinitas

A possibilidade de representar funções por meio de séries infinitas, particularmente séries de potências, foi percebida desde o início do desenvolvimento do Cálculo no século XVII, tendo-se constituído num dos mais poderosos estímulos a esse desenvolvimento.

Mas as séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade. A primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão 1/4, que intervém no cálculo da área da parábola, feito por Arquimedes. Seguindo a tradição grega de evitar o infinito, pelas dificuldades lógicas que esse conceito pode trazer em seu bojo, Arquimedes não soma todos os termos da referida série; ele observa que a soma de uma certa quantidade à reduzida de ordem n produz uma quantidade independente de n, que é a soma da série.[2]

Depois dessa ocorrência de uma série geométrica num trabalho de Arquimedes, as séries infinitas só voltariam a aparecer na Matemática cerca de 1.500 anos mais tarde, no século XIV. Nessa época havia um grupo de matemáticos na Universidade de Oxford que estudava a cinemática, ou fenômeno do movimento. Foi esse estudo que levou à reconsideração das séries infinitas. E foi então que se descobriu que o termo geral de uma série pode tender a zero sem que a série seja convergente. Isto ocorreu em conexão com a série harmônica e a descoberta foi feita por Nicole Oresme, de quem falaremos logo adiante.

A divergência da série harmônica

A divergência da série harmônica é um fato notável, que jamais seria descoberto experimentalmente. De fato, se fôssemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo, como um ano tem aproximadamente $365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.557.600$ segundos, nesse período de tempo seríamos capazes de somar a série até $n = 31.557.600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a pouco mais de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, esses números são muito pequenos para indicar divergência da série; não somente isso, mas depois de 100 anos já estaríamos somando algo muito pequeno, da ordem de 3×10^{-9}. É claro também que é impossível efetuar essas somas para valores tão grandes de n.

Vamos fazer mais um exercício de imaginação. Hoje em dia temos computadores muito rápidos, e a tecnologia está produzindo máquinas cada vez mais rápidas. Mas isso tem um limite, pois, como sabemos, nenhum sinal físico pode ser transmitido com velocidade superior à da luz. Portanto, nenhum computador poderá efetuar uma soma em tempo inferior a 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer distância igual ao diâmetro de um elétron. Pois bem, com tal computador, em um ano, mil anos e um bilhão de anos, respectivamente, poderíamos somar termos em números iguais a

$$315.576 \times 10^{25}, \quad 315.576 \times 10^{28} \quad \text{e} \quad 315.576 \times 10^{34}.$$

E veja os resultados aproximados que obteríamos para a soma da série harmônica, em cada um desses casos, respectivamente:

$$70,804, \quad 77,718 \quad \text{e} \quad 91,5273.$$

Imagine, finalmente, que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há 16 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,2999 para soma da série harmônica, um número ainda muito pequeno para fazer suspeitar que a série diverge.

— Mas como se chega ao número 94,299, se o (idealizado) computador mais rápido que se possa construir deveria ficar ligado durante 16 bilhões de anos?

Sim, não há como fazer essa soma, mas existem métodos que permitem substituir a soma S_n dos n primeiros termos da série por uma expressão matemática que aproxima S_n e que

[2]Veja nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 4, Dezembro de 1986.

pode ser calculada numericamente; e os matemáticos sabem disso há mais de 300 anos!...[3]

Nicole Oresme e a série de Swineshead

Nicole Oresme (1325–1382) foi um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; e nessa função revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Ao lado de tudo isso, Oresme foi também bispo de Lisieux.

Oresme mantinha contato com o grupo de pesquisadores de Oxford e contribuiu no estudo de várias das séries estudadas nessa época. Uma dessas séries é a seguinte:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

Essa série foi considerada, por volta de 1350, por Richard Swineshead, um dos matemáticos de Oxford. Ela surge a propósito de um movimento que se desenvolve durante o intervalo de tempo [0, 1] da seguinte maneira: a velocidade permanece constante e igual a 1 durante a primeira metade do intervalo, de zero a 1/2: dobra de valor no segundo subintervalo (de duração 1/4), triplica no terceiro subintervalo (de duração 1/8), quadruplica no quarto sub- intervalo (de duração 1/16) etc. Como se vê, a soma da série assim construida é a soma dos produtos da velocidade pelo tempo em cada um dos sucessivos sub-intervalos de tempo e representa o espaço total percorrido pelo móvel (Fig. 3.1a).

Swineshead achou o valor 2 para a soma através de um longo e complicado argumento verbal. Mais tarde, Oresme, deu uma explicação geométrica bastante interessante para a soma da série. Observe que essa soma é igual à área da figura formada com uma infinidade de retângulos verticais, como ilustra a Fig. 3.1a. O raciocínio de Swineshead, combinado com a interpretação geométrica de Oresme, se traduz simplesmente no seguinte: a soma das áreas dos retângulos verticais da Fig. 3.1a é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais da Fig. 3.1b. Ora, isso é o mesmo que substituir o movimento original por uma sucessão infinita de movimentos, todos com velocidade igual à velocidade original: o primeiro no intervalo de tempo [0, 1]; o segundo no intervalo de tempo [1/2, 1]; o terceiro no intervalo [3/4, 1]; e assim por diante. Vê-se assim que o espaço percorrido (soma das áreas dos retângulos da Fig. 3.1b) é agora dado pela soma da série geométrica

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

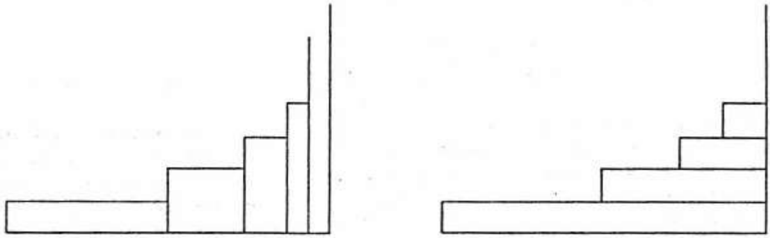
Isso permite obter a soma da série original, pois sabemos somar uma série geométrica; no caso desta última o valor é 2.

Hoje em dia a maneira natural de somar a série de Swineshead é esta:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n-1)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{S}{2},$$

[3] O leitor curioso pode ver a explicação desses métodos em nosso artigo na *Revista Matemática Universitária*, Nº 19, Dezembro de 1995.



(a) (b)

Fig. 3.1

donde $S = 2$. Deixamos ao leitor a tarefa de interpretar esse procedimento em termos do raciocínio de Swineshead e Oresme.

As séries infinitas, como dissemos acima, tiveram um papel importante no desenvolvimento do Cálculo, desde o início desse desenvolvimento no século XVII. Mas foi no século XIX que as idéias de convergência e somas infinitas atingiram plena maturidade, e isso devido, principalmente, ao trabalho de Cauchy, de quê falaremos a seguir.

Cauchy e as séries infinitas

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) é a figura mais influente da Matemática na França de sua época. Como professor da Escola Politécnica ele escreveu vários livros didáticos, bastante inovadores, por isso mesmo tiveram grande influência por várias décadas. O primeiro desses livros é o *Cours d'Analyse* de 1821, cujo capítulo VI é dedicado às séries, e contém quase todos os resultados que discutimos no presente capítulo. É também aí que aparece o critério de convergência que viria ser chamado "de Cauchy", formulado nos seguintes termos:

"... para que a série u_0, u_1, $u_2, \ldots u_n$, u_{n+1}, &c... *seja convergente, é necessário e suficiente que valores crescentes de n façam convergir indefinidamente a soma* $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c \ldots + u_{n-1}$ *para um valor fixo s: em outras palavras, é necessário e suficiente que, para valores infinitamente grandes do número n, as somas* s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, &c... *difiram da soma s, e por conseqüência entre elas, por quantidades infinitamente pequenas.*"

O pouco mais que Cauchy escreve em seguida sobre esse critério nada acrescenta de substância, apenas esclarece ser [...necessário e suficiente] "*que, para valores crescentes de n, as somas das quantidades* u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, &c... *tomadas, a partir da primeira, tantas quantas se queiram, resultem sempre em valores numéricos inferiores a todo limite prescrito.*"

Ao contrário de Bolzano, Cauchy sequer acena com uma demonstração — parece julgá-la desnecessária —, limitando-se a usar esse critério para provar que a série harmônica é divergente e que a série alternada $\sum(-1)^n/n$ é convergente. No primeiro caso ele observa que

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$

donde conclui que a série é divergente. No segundo caso o raciocínio é o seguinte, supondo $m > n$: se $m - n$ for ímpar,

$$|S_n - S_m| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right);$$

e se $m - n$ for par,

$$|S_n - S_m| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) - \frac{1}{m}$$

Em qualquer desses casos, $|S_n - S_m| < 1/n$, o que prova a convergência desejada. É fácil verificar que esse último raciocínio se aplica também à série alternada $\sum(-1)^n a_n$, onde (a_n) é uma seqüência nula não crescente. Aliás, a convergência dessa série já era sabida de Leibniz (1646–1716), que lhe faz referência numa carta de 1713, o que explica atribuir-se a ele o teste dado no Teorema 3.21 (p. 92).

Essas são as únicas aplicações em que Cauchy utiliza seu critério de convergência, podendo-se então dizer que tal critério não teria feito falta alguma a Cauchy. Sua importância só se faria sentir mais tarde, no final do século, no trato de importantes problemas de aproximação, em equações diferenciais e cálculo de variações.

Embora, como dissemos, o trabalho de Cauchy tenha tido influência decisiva no desenvolvimento e consolidação do estudo da convergência das séries no século XIX, esse desenvolvimento vinha desabrochando desde o final do século anterior. E a esse respeito devemos mencionar aqui o importante trabalho de um ilustre autor português, José Anastácio da Cunha. As séries infinitas são discutidas no capítulo IX ("livro" IX) de sua obra "Princípios Mathematicos", onde se pode identificar uma verdadeira antecipação de muitas das idéias de Cauchy e seus contemporâneos, inclusive o "critério de convergência de Cauchy".[4]

[4]Veja o artigo de J. F. Queiró na *Revista Matemática Universitária*, Nº 14, Dezembro de 1992.