10

A Integral de Riemann

As noções de derivada e integral constituem o par de conceitos mais importantes da Análise. Enquanto a derivada corresponde à noção geométrica de tangente e à idéia física de velocidade, a integral está associada à noção geométrica de área e à idéia física de trabalho. É um fato notável e de suma importância que essas duas noções, aparentemente tão diversas, estejam intimamente ligadas.

1 Revisão sobre sup e inf

Demonstraremos aqui alguns resultados elementares sobre supremos e ínfimos de conjuntos de números reais, para uso imediato.

Dada uma função limitada $f\colon X \to \mathbb{R}$, lembremos que $\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x); x \in X\}$ e $\inf f = \inf f(X) = \inf\{f(x); x \in X\}$. Todos os conjuntos a seguir mencionados são não-vazios.

Lema 1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$. A fim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.*

Demonstração: Todo $y \in B$ é cota superior de A, logo $\sup A \leq y$. Isto mostra que $\sup A$ é cota inferior de B, portanto $\sup A \leq \inf B$. Se valer a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \geq \varepsilon$ para quaisquer $x \in A$, $y \in B$. Reciprocamente, se $\sup A =$

$\inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\sup A - \varepsilon/2$ não é cota superior de A e $\inf B + \varepsilon/2$ não é cota inferior de B, logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \varepsilon/2 < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2$. Segue-se que $y - x < \varepsilon$. □

Lema 2. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A+B = \{x+y; x \in A, y \in B\}$ e $c \cdot A = \{cx; x \in A\}$. Além disso, tem-se $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ e $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$, $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$, caso seja $c \geq 0$. Se $c < 0$ então $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.*

Demonstração: Pondo $a = \sup A$ e $b = \sup B$, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ tem-se $x \leq a$, $y \leq b$, logo $x + y \leq a + b$. Portanto, $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $a - \varepsilon/2 < x$ e $b - \varepsilon/2 < y$, donde $a + b - \varepsilon < x + y$. Isto mostra que $a + b$ é a menor cota superior de $A + B$, ou seja, que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. A igualdade $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ é óbvia se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, logo $cx \leq ca$. Portanto ca é cota superior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado qualquer número d menor do que ca, temos $d/c < a$, logo existe $x \in A$ tal que $d/c < x$. Segue-se que $d < cx$. Isto mostra que $c \cdot a$ é a menor cota superior de $c \cdot A$, ou seja, que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$. Os casos restantes enunciados no lema são provados de modo análogo. □

Corolário. *Sejam $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Para todo $c \in \mathbb{R}$ são limitadas as funções $f + g$, $cf \colon X \to \mathbb{R}$. Tem-se além disso, $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$, $\sup(cf) = c \cdot \sup f$, e $\inf(cf) = c \cdot \inf f$ quando $c \geq 0$. Caso $c < 0$, tem-se $\sup(cf) = c \cdot \inf f$ e $\inf(cf) = c \cdot \sup f$.*

Com efeito, sejam $A = f(X)$, $B = g(X)$, $C = (f+g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$. Evidentemente $C \subset A + B$, logo $\sup(f+g) = \sup C \leq \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$. Além disso, $\sup(cf) = \sup\{c \cdot f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \sup A$, quando $c \geq 0$. Os demais casos enunciados no corolário se provam de modo análogo. □

Observação. Pode-se ter efetivamente $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$. Basta tomar $f, g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$.

Lema 3. *Dada $f \colon X \to \mathbb{R}$ limitada, sejam $m = \inf f$, $M = \sup f$ e $\omega = M - m$. Então $\omega = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.*

Demonstração: Dados $x, y \in X$ arbitrários, para fixar idéias seja $f(x) \geq f(y)$. Então $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$, donde $|f(x) - f(y)| \leq M - m = \omega$. Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ dado podemos achar $x, y \in X$ tais que $f(x) > M - \varepsilon/2$ e $f(y) < m + \varepsilon/2$. Então

$$|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon.$$

Assim, ω é a menor das cotas superiores do conjunto $\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$, o que prova o lema. □

Lema 4. *Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$, existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $\sup A' = \sup A$ e $\inf B' = \inf B$.*

Demonstração: Evidentemente, $\sup A$ é uma cota superior de A'. Além disso, se $c < \sup A$ existe $a \in A$ com $c < a$, logo existe $a' \in A'$ com $c < a \leq a'$, portanto c não é cota superior de A'. Assim, $\sup A$ é a menor cota superior de A', isto é, $\sup A = \sup A'$. Um raciocínio análogo demonstra o resultado para $\inf B$ e $\inf B'$. □

2 Integral de Riemann

Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. A notação será sempre usada de modo que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de *comprimento* $t_i - t_{i-1}$, será chamado o *i-ésimo intervalo* da partição P. Evidentemente, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Sejam P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Diz-se que Q *refina* P quando $P \subset Q$. A maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentar-lhe um único ponto.

Dada uma função limitada $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, usaremos as notações

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \quad \text{e} \quad M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}.$$

Em particular, temos $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, as notações $m_i = \inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ e $\omega_i = M_i - m_i$ indicarão o ínfimo, o supremo e a *oscilação* de f no i-ésimo intervalo de P. Quando f é contínua, m_i e M_i são valores efetivamente assumidos por f em $[t_{i-1}, t_i]$. Em particular, neste caso existem $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que $\omega_i = |f(y_i) - f(x_i)|$.

A *soma inferior* de f relativamente à partição P é o número

$$s(f;P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A *soma superior* de f relativamente à partição P é, por definição,

$$S(f;P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, $m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$ seja qual for a partição P. Além disso, $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1})$.

Quando f estiver clara no contexto, pode-se escrever simplesmente $s(P)$ e $S(P)$ em vez de $s(f;P)$ e $S(f;P)$ respectivamente.

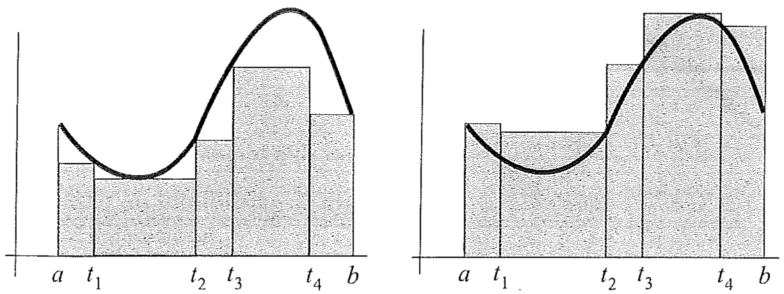

Figura 9: A soma inferior e a soma superior.

No caso em que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, os números $s(f;P)$ e $S(f;P)$ são valores aproximados, respectivamente por falta e por excesso, da área da região limitada pelo gráfico de f, pelo intervalo $[a,b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos a e b desse eixo. Quando $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, essas somas são valores aproximados de tal área, com o sinal trocado.

A *integral inferior* e a *integral superior* da função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f;P), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f;P),$$

o sup e o inf sendo tomados relativamente a todas as partições P do intervalo $[a,b]$.

Teorema 1. *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja: $P \subset Q \Rightarrow s(f;P) \leq s(f;Q)$ e $S(f;Q) \leq S(f;P)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que a partição $Q = P \cup \{r\}$ resulte de P pelo acréscimo de um único ponto r, digamos com $t_{j-1} < r < t_j$. Sejam m' e m'' respectivamente os ínfimos de f nos intervalos $[t_{j-1}, r]$ e $[r, t_j]$. Evidentemente, $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$ e $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Portanto

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Para obter o resultado geral, onde Q resulta de P pelo acréscimo de k pontos, usa-se k vezes o que acabamos de provar. Analogamente, $P \subset Q \Rightarrow S(f;Q) \leq S(f;P)$. □

Corolário 1. *Para quaisquer partições P, Q do intervalo $[a,b]$ e qualquer função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.*

Com efeito, a partição $P \cup Q$ refina simultaneamente P e Q, logo $s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q)$. □

Corolário 2. *Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ então*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Com efeito, as desigualdades externas são óbvias e a do meio resulta do Corolário 1 e do Lema 1. □

Corolário 3. *Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0, obteremos os mesmos valores para $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.*

Com efeito, basta combinar o Teorema 1 e o Lema 4. □

Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se a *integral* (de Riemann) de f e é indicado por $\int_a^b f(x)\,dx$.

No símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, x é o que se chama uma "variável muda", isto é, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt$, etc.

Às vezes prefere-se a notação mais simples $\int_a^b f$. A justificativa para a notação mais complicada será vista no Teorema 2, Capítulo 11.

Quando f é integrável, sua integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é o número real cujas aproximações por falta são as somas inferiores $s(f;P)$ e cujas aproximações por excesso são as somas superiores $S(f;P)$. O Teorema 1 diz que essas aproximações melhoram quando se refina a partição P. Geometricamente, quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a existência de $\int_a^b f(x)\,dx$ significa que a região limitada pelo gráfico de f, pelo segmento $[a,b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas pelos pontos a e b é mensurável (isto é, possui área) e o valor da integral é, por definição, a área dessa região. No caso geral, tem-se a área externa $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ e a área interna $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, que podem ser diferentes, como veremos agora.

Exemplo 1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é racional e $f(x) = 1$ quando x é irracional. Dada uma partição arbitrária P, como cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém números racionais e irracionais, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, logo $s(f;P) = 0$ e $S(f;P) = b-a$. Assim, f não é integrável, pois $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b-a$.

Exemplo 2. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Então, seja qual for a partição P, temos $m_i = M_i = c$ em todos os intervalos, logo $s(f;P) = S(f;P) = c(b-a)$. Assim f é integrável, com $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a)$.

Teorema 2. **(Condição imediata de integrabilidade.)** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é integrável.*

(2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.*

(3) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.*

Demonstração: Sejam A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f. Pelo Corolário 1 do Teorema 1, tem-se $s \leq S$ para toda $s \in A$ e toda $S \in B$. Supondo (1), vale $\sup A = \inf B$. Logo, pelo Lema 1, podemos concluir que (1) $\Rightarrow$ (2). Para provar que (2) $\Rightarrow$ (3) basta observar que se $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q, segue-se do Teorema 1 que $s(f;P) \leq s(f;P_0) \leq S(f;P_0) \leq S(f;Q)$, donde se conclui que $S(f;P_0) - s(f;P_0) < \varepsilon$. Finalmente, (3) $\Rightarrow$ (1) pelo Lema 1. □

Exemplo 3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ quando $a < x \leq b$ e $f(a) = A$. Afirmamos que f é integrável, com $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$. Para fixar idéias, suponhamos $c < A$. Então, dada uma partição qualquer $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ temos $m_1 = c$, $M_1 = A$ e $m_i = M_i = c$ para $1 < i \leq n$. Portanto $S(f;P) - s(f;P) = (A-c)(t_1 - t_0)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, tomamos uma partição P com $t_1 - t_0 < \varepsilon/(A-c)$ e obtemos $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Logo f é integrável. Além disso, como $s(f;P) = c(b-a)$ para toda partição P, temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a).$$

Mas, sendo f integrável, resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = c(b-a).$$

Evidentemente, um resultado análogo vale quando $f(x) = c$ para $x \in [a,b)$, ou quando $f(x) = c$ para todo $x \in (a,b)$.

3 Propriedades da integral

Teorema 3. *Seja $a < c < b$. A função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*

Demonstração: Sejam A e B respectivamente os conjuntos das somas inferiores de $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$. Vê-se facilmente que $A+B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente às partições de $[a,b]$ que contêm o ponto c. Pelo Corolário 3 do Teorema 1, ao calcular a integral inferior de f, basta considerar as partições desse tipo, pois elas são as que refinam $P_0 = \{a,c,b\}$. Pelo Lema 2,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Analogamente se mostra que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Logo

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \left(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\right) + \left(\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f\right).$$

Como as duas parcelas dentro dos parênteses são ≥ 0, sua soma é zero se, e somente se, elas são ambas nulas. Assim, f é integrável se, e somente se, suas restrições $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ o são. No caso afirmativo, vale a igualdade $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Exemplo 4. Diz-se que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma *função-escada* quando existem uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ e números reais $c_1, \ldots, c_n$ tais que $f(x) = c_i$ quando $t_{i-1} < x < t_i$. (Note-se que nada se diz sobre os valores $f(t_i)$.) Segue-se do Teorema 3 e do Exemplo 3 que toda função escada é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(t_i - t_{i-1})$.

Convenção. A igualdade $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ faz sentido apenas quando $a < c < b$. A fim de torná-la verdadeira sejam quais forem $a, b, c \in \mathbb{R}$, faremos duas convenções, que serão adotadas doravante. Primeira: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Segunda: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Aceitas estas convenções, vale para toda função integrável f a igualdade acima. Para verificá-la, há seis possibilidades a considerar: $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Em cada caso, basta admitir a integrabilidade de f no intervalo maior.

Teorema 4. *Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:*

(1) *A soma $f + g$ é integrável e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) *O produto $f \cdot g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.*

(3) *Se $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ então o quociente f/g é integrável.*

(4) *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

(5) *$|f|$ é integrável e $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.*

Demonstração: Dada uma partição arbitrária P de $[a,b]$, se indicarmos com m_i', m_i'' e m_i respectivamente os ínfimos de f, g e $f+g$ no i-ésimo intervalo de P, teremos $m_i' + m_i'' \leq m_i$, pelo Corolário do Lema 2, logo $s(f;P) + s(g;P) \leq s(f+g;P) \leq \underline{\int_a^b}(f+g)$ para toda partição P. Se tomarmos duas partições P e Q teremos ainda

$$s(f;P) + s(g;Q) \leq s(f;P\cup Q) + s(g;P\cup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g &= \sup_P s(f;P) + \sup_Q s(g;Q)\\ &= \sup_{P,Q}[s(f;P) + s(g;Q)] \leq \underline{\int_a^b}(f+g).\end{aligned}$$

Isto prova a primeira das desigualdades abaixo. A terceira se demonstra de modo análogo e a segundo é óbvia:

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Quando f e g são integráveis, as três desigualdades se reduzem a igualdades, o que prova (1).

(2) Seja K tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Dada uma partição P, sejam ω_i', ω_i'' e ω_i respectivamente as oscilações de f, g e $f \cdot g$ no i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ temos:

$$\begin{aligned}|f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)| &= |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x))|\\ &\leq |f(y) - f(x)|\,|g(y)| + |f(x)|\,|g(y) - g(x)|\\ &\leq K(\omega_i' + \omega_i'').\end{aligned}$$

Daí $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq K \cdot [\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum \omega_i''(t_i - t_{i-1})]$. A integrabilidade de $f \cdot g$ segue-se então da integrabilidade de f e g, pelo Teorema 2.

Quanto a cf, sua integrabilidade resulta do que acabamos de provar. Além disso, se $c \geq 0$, temos $s(cf;P) = c \cdot s(f;P)$ para toda partição P, donde, pelo Lema 2,

$$\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c \cdot \underline{\int_a^b} f = c \cdot \int_a^b f.$$

Caso $c < 0$, temos $s(cf;P) = c \cdot S(f;P)$, logo $\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c \cdot \overline{\int_a^b} f = c \cdot \int_a^b f$.

(3) Como $f/g = f \cdot (1/g)$, basta provar que $1/g$ é integrável se g é integrável e $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$. Indiquemos com ω_i e ω_i' respectivamente as oscilações de g e $1/g$ no i-ésimo intervalo de uma partição P. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar P de modo que $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \cdot k^2$. Para quaisquer x, y no i-ésimo intervalo de P tem-se

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{\omega_i}{k^2},$$

portanto $\omega_i' \leq \omega_i/k^2$. Segue-se que $\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$, logo $1/g$ é integrável.

(4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $s(f;P) \leq s(g;P)$ e $S(f;P) \leq S(g;P)$ para toda partição P, donde $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(5) A desigualdade evidente $\big||f(y)| - |f(x)|\big| \leq |f(y) - f(x)|$ mostra que a oscilação de $|f|$ em qualquer conjunto não supera a de f. Logo, f integrável $\Rightarrow$ $|f|$ integrável. Além disso, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, resulta de (4) que

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

ou seja, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

Corolário. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$ então $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K(b-a)$.*

Observação. Se uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Isto resulta de (4) acima. Mas é possível ter $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, com $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ sem que f seja identicamente nula. Basta tomar $f(x) = 1$ num conjunto finito de pontos em $[a,b]$ e $f(x) = 0$ nos pontos de $[a,b]$ fora desse conjunto finito. Pelo Exemplo 4, f é integrável e sua integral é zero. Entretanto, se f é contínua e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ implica f identicamente nula. Com efeito, se existisse algum ponto $x_0 \in [a,b]$ onde $f(x_0) = c > 0$, existiria um intervalo não-degenerado $[\alpha,\beta]$, com $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tal que $f(x) > c/2$ para todo $x \in [\alpha,\beta]$. Então, como $f(x) \geq 0$, teríamos $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \frac{c}{2}(\beta - \alpha) > 0$, uma contradição.

4 Condições de integrabilidade

Teorema 5. *Toda função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade uniforme de f no compacto $[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Seja P uma partição de $[a,b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \delta$. Em todo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P existem x_i, y_i tais que $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(y_i)$, donde $\omega_i = f(y_i) - f(x_i) < \varepsilon/(b-a)$. Conseqüentemente $\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Pelo Teorema 2, f é integrável. □

Teorema 6. *Toda função monótona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Para fixar idéias, seja f não-decrescente e não-constante. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a,b]$ cujos intervalos têm todos comprimento $< \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ temos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ portanto $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$ e

$$\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum \omega_i = \varepsilon.$$

Logo f é integrável. □

As considerações a seguir são um preparativo para o Teorema 7, que engloba os Teoremas 5 e 6 como casos particulares.

Se $a < b$, indicaremos com $|I| = b - a$ o *comprimento* do intervalo (fechado, aberto ou semi-aberto) I cujos extremos são a e b. Diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável $X \subset \bigcup I_k$ de X por intervalos abertos I_k cuja soma dos comprimentos é $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Na definição de conjunto de medida nula, os intervalos I_k da cobertura $X \subset \bigcup I_k$ são tomados abertos a fim de permitir o uso do Teorema de Borel-Lebesgue, quando necessário. Deve-se observar porém que se, para todo $\varepsilon > 0$, existir uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup I_k$ por meio de intervalos limitados I_k (abertos ou não), com $\Sigma|I_k| < \varepsilon$, então X tem medida nula. Com efeito, sendo assim, para todo $k \in \mathbb{N}$ tomamos um intervalo aberto $J_k \supset I_k$ com $|J_k| = |I_k| + \varepsilon/2k$, o que nos dá uma cobertura aberta $X \subset \bigcup J_k$, com $\Sigma|J_k| = \Sigma|I_k| + \Sigma(\varepsilon/2k) = \Sigma|I_k| + \varepsilon < 2\varepsilon$, logo X tem medida nula.

Exemplo 5. Todo conjunto enumerável $X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ tem medida nula. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, seja I_k o intervalo aberto de centro x_k e comprimento $\varepsilon/2^{k+1}$. Então $X \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Em particular, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem medida nula.

Teorema 7. *Se o conjunto D dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula então f é integrável.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k, \ldots$ tais que $D \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$ é a oscilação de f em $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b] - D$, seja J_x um intervalo aberto de centro x tal que a oscilação de $f|(J_x \cap [a,b])$ é menor do que $\varepsilon/2(b-a)$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta $[a,b] \subset \left(\bigcup_k I_k\right) \cup \left(\bigcup_x J_x\right)$ possui uma subcobertura finita $[a,b] \subset I_1 \cup \cdots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \cdots \cup J_{x_n}$. Seja P a partição de $[a,b]$ formada pelos pontos a e b e os extremos desses $m+n$ intervalos que pertençam a $[a,b]$. Indiquemos com $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ os intervalos de P que estão contidos em algum $\overline{I}_k$ e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os demais intervalos de P, cada um dos quais está contido em algum J_{x_i}. Então $\sum(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ e a oscilação de f em cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ é $\omega_\beta < \varepsilon/2(b-a)$. Logo

$$
\begin{aligned}
S(f;P) - s(f;P) &= \sum \omega_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta(t_\beta - t_{\beta-1}) \\
&< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b-a)} \\
&< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon \cdot (b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Logo f é integrável. □

A recíproca do Teorema 7 é verdadeira. A fim de demonstrá-la, faremos uso da oscilação $\omega(f;x)$ da função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no ponto $x \in [a,b]$, assim definida: para cada $\delta > 0$, seja $\omega(\delta) = M_\delta - m_\delta$,

onde M_δ e m_δ são respectivamente o sup e o inf de f em $[a,b] \cap [x-\delta, x+\delta]$. A função $\omega(\delta)$ é ≥ 0, limitada e não-decrescente, logo existe o limite $\omega(f;x) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta)$, que chamaremos a *oscilação* de f no ponto x. Segue-se imediatamente da definição de função contínua que $\omega(f;x) > 0$ se, e somente se, a função f é descontínua no ponto x. Se x é um ponto interior do intervalo $I \subset [a,b]$ então $\omega(f;x) \leq \omega(f;I)$, onde $\omega(f;I) = \sup\limits_{x \in I} f(x) - \inf\limits_{x \in I} f(x)$. Mas se x é um dos extremos de I, pode ocorrer que seja $\omega(f;x) > \omega(f;I)$. Este é, por exemplo, o caso quando $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 1$ para $-1 \leq x < 0$ e $f(x) = 0$ quando $x \geq 0$. Tomando $I = [0,1]$ e $x = 0$, temos $\omega(f;I) = 0$ e $\omega(f;x) = 1$.

Com esses preliminares esclarecidos, passemos à

Recíproca do Teorema 7. *O conjunto D dos pontos de descontinuidade da função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tem medida nula.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $D_k = \{x \in [a,b]; \omega(f;x) \geq 1/k\}$. Então $D = \cup D_k$, logo basta mostrar que cada D_k tem medida nula. Fixemos k e tomemos $\varepsilon > 0$. Sendo f integrável, existe uma partição $P = \{t_0 < t_1, < \cdots < t_k\}$ de $[a,b]$ tal que $\Sigma\omega_i \cdot (t_i - t_{i-j}) < \varepsilon/k$, onde ω_i é a oscilação de f em $[t_{i-j}, t_i]$. Indicando com $[t_{\alpha-i}, t_\alpha]$ os intervalos de P que contêm pontos de D_k em seu interior, temos $\omega_\alpha \geq 1/k$ para cada α e $D_k = [\cup(t_{\alpha-1}, t_\alpha)] \cup F$, onde F é o conjunto (finito) das extremidades dos $(t_{\alpha-1}, t_\alpha)$ que pertençam a D_k. Então

$$
\frac{1}{k}\Sigma(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \leq \Sigma\omega_\alpha \cdot (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \leq \Sigma\omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/k,
$$

logo $\Sigma(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível cobrir D_k com um conjunto finito F mas uma reunião finita de intervalos cuja soma dos comprimentos é $< \varepsilon$. Segue-se que D_k tem medida nula. □

Exemplo 6. O conjunto de Cantor K (seção 5 do Capítulo 5), embora não-enumerável, tem medida nula. Com efeito, se pararmos na n-ésima etapa de sua construção, veremos que o conjunto de Cantor está contido na reunião de 2^n intervalos, cada um tendo comprimento $1/3^n$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $(2/3)^n < \varepsilon$, e concluiremos que a medida de K é zero. Podemos considerar a função $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definida pondo-se $f(x) = 0$ se $x \in K$ e $f(x) = 1$ se $x \notin K$. Como $[0,1] - K$ é aberto, a função f é localmente constante, e portanto contínua, nos pontos $x \notin K$. Como K não possui pontos interiores, f é descontínua em odos os pontos de K. Pelo Teorema 7, f é integrável. Dada qualquer partição P de $[0,1]$ todos os intervalos de P contêm pontos que não pertencem a K, pois $\operatorname{int} K = \varnothing$. Assim, $M_i = 1$ e $S(f;P) = 1$ para toda partição P. Segue-se que $\int_0^1 f(x)\,dx = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$.

Exemplo 7. Se $a < b$, o intervalo $[a,b]$ não tem medida nula. Com efeito, se $[a,b] \subset \bigcup I_k$ é uma cobertura (que podemos supor finita) por intervalos I_k, tem-se sempre $\Sigma|I_k| \geq b - a$. De fato, os pontos a, b e mais as extremidades dos I_k que estejam contidas em $[a,b]$ formam uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ tal que cada intervalo (t_{i-1}, t_i) está contido em algum I_k. Se escrevermos $i \subset k$ para significar que $(t_{i-1}, t_i) \subset I_k$, teremos $\sum_{i \subset k}(t_i - t_{i-1}) \leq |I_k|$. Portanto

$$b - a = \Sigma(t_i - t_{i-1}) = \sum_k \left[\sum_{i \subset k}(t_i - t_{i-1})\right] \leq \Sigma|I_k|.$$

Exercícios

Seção 2: Integral de Riemann

1. Defina $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pondo $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$.
2. Seja $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é uma função ímpar, prove que $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$. Se, porém, f é par, prove que $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
3. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$. (Ponha $f(0) = 1$ caso $0 \in [a,b]$.) Prove que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a,b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
4. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.
5. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = x$ quando x é racional e $f(x) = x + 1$ quando x é irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de f. Usando uma função integrável $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ em vez de x, defina agora $\varphi(x) = g(x)$ se x é racional e $\varphi(x) = g(x)+1$ para x irracional. Calcule as integrais (inferior e superior) de φ em termos da integral de g.

Seção 3: Propriedades da integral

1. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Prove que a função $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é lipschitziana.
2. Prove que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis então são também integráveis as funções $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definidas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Conclua daí que são integráveis as funções $f_+, f_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dadas por $f_+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f_+(x) = f(x)$ se $f(x) > 0$; $f_-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$ e $f_-(x) = -f(x)$ se $f(x) < 0$ (supondo ainda f integrável).
3. Prove que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas então

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx.$$

(Desigualdade de Schwarz.)

Seção 4: Condições suficientes de integrabilidade

1. Prove que a função f do Exercício 2.3 é integrável.
2. Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável e conclua daí que o Teorema 6 decorre do Teorema 7.
3. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se D' (conjunto dos pontos de acumulação de D) é enumerável, prove que f é integrável.
4. Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, que se anula fora de um conjunto de medida nula, pode não ser integrável. Nestas condições, supondo f integrável, prove que sua integral é igual a zero.
5. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *conteúdo nulo* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \cdots \cup I_k$, por meio de um número *finito* de intervalos abertos, com $\sum_{j=1}^k |I_j| < \varepsilon$. Prove:

   (a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

(b) Existem conjuntos de medida nula que não têm conteúdo nulo.

(c) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

(d) Se uma função limitada $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

6. Se um conjunto $X \subset [a,b]$ não tem medida nula então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a,b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de X em seu interior é maior do que ε.

7. Seja $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva (isto é, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$). Existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $X = \{x \in [a,b];\ \varphi(x) \geq \alpha\}$ não tem medida nula.

8. Se a função $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é positiva e integrável, então $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$. Conclua que se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$. (Use os exercícios 6. e 7.)

9. Seja $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)\,dx = 0$ então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a,b]$, prove que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.