Capítulo 9

Seqüências e séries de funções

Neste capítulo final fazemos uma breve apresentação das seqüências e séries de funções. Ao lado da integral, elas são um outro processo infinito muito importante para a definição e o estudo das propriedades de funções, principalmente as séries de potências. Por exemplo, o leitor já viu, em seu estudo do Cálculo, que funções como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, possuem as seguintes séries de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Estas séries podem ser usadas como ponto de partida para a definição de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ de maneira puramente analítica, sem a necessidade de recorrer à motivação geométrica, como se costuma fazer em Trigonometria.

Para o estudo deste capítulo o leitor poderá sentir necessidade de recordar, de seus estudos anteriores de Cálculo, o chamado "polinômio de Taylor", e as aproximações de funções por esse tipo de polinômio.

9.1 Seqüências de funções

Vamos iniciar nosso estudo com as seqüências de funções f_n, todas com o mesmo domínio D. Assim, para cada valor de x em D, temos uma seqüência numérica $f_n(x)$, à qual se aplicam todos os conceitos e resultados das séries numéricas, em particular o conceito de limite. Aqui, entretanto, esse limite, em geral, depende do valor x considerado — é *função* de x; daí designarmos o limite de uma seqüência de funções $f_n(x)$ por $f(x)$, justamente para evidenciar que esse limite é função de x.

Convergência simples e convergência uniforme

Quando lidamos com seqüências de funções, há que se distinguir dois tipos de convergência, um dos quais é o de *convergência simples* ou *convergência pontual.* Diz-se que uma seqüência de funções f_n, com o mesmo domínio D, converge *simplesmente* ou *pontualmente* para uma função f se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $x \in D$ existe N tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Observe, entretanto, que o N que é determinado nessa definição pode não ser o mesmo para diferentes valores de x.

9.1 Exemplo. Um exemplo simples e bastante esclarecedor do conceito de convergência uniforme é o da seqüência $f_n(x) = x/n$, o domínio de x sendo toda a reta. É claro que $f_n(x) \to 0$, pois, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|x/n| < \varepsilon \Leftrightarrow n > N = \frac{|x|}{\varepsilon}.$$

Vemos assim que, para cada x fixado, encontramos um N; mas esse N varia com o variar de x; e quanto maior for $|x|$, tanto maior será o N, o qual tende a infinito com $|x| \to \infty$. Em conseqüência disso, a convergência de x/n para zero não se dá de maneira "uniforme"para diferentes valores de x. A Fig. 9.1 ilustra muito bem o que se passa: o gráfico das funções $y = x/n$ são retas, que se tornam tanto mais próximas do eixo dos x quanto maior for o índice n. Mas, não importa quão grande seja esse índice, há sempre valores de x para os quais $|f_n(x)|$ supera qualquer número positivo, digamos, $|f_n(x)| > 1$. Dito de outra maneira, os gráficos não aproximam o eixo dos x de maneira "uniforme em x".

Porém, como a própria figura sugere, restringindo o domínio das funções f_n a um intervalo do tipo $|x| \leq c$, onde c é qualquer número positivo, conseguimos determinar um índice N, válido para todos os valores x desse intervalo. Com efeito, neste caso, $|x/n| \leq c/n$, de forma que basta fazer $c/n < \varepsilon$ para termos também $|x/n| < \varepsilon$; ora, fazer $c/n < \varepsilon$ é o mesmo que fazer $n > c/\varepsilon$. Assim,

$$n > N = \frac{c}{\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} < \varepsilon.$$

Dizemos então que a convergência é "uniforme em x", visto que conseguimos encontrar um N $(= c/\varepsilon)$ válido para todo $x \in [-c, c]$. É interessante observar também que, se aumentarmos o c, teremos de aumentar o N, embora a convergência continue uniforme em qualquer intervalo $|x| \leq c$. Mas observe: ela não é uniforme na união desses intervalos, que é todo o eixo real!

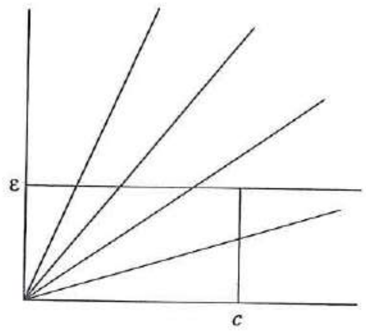

Figura 9.1

9.2. Definição. *Diz-se que uma seqüência de funções f_n converge uniformemente para uma função f num domínio D se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $x \in D$,*

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

É costume referir-se à convergência de uma seqüência de funções f_n para uma função f, sem qualquer qualificativo; neste caso deve-se entender que se trata de convergência simples ou pontual. É claro que este tipo de convergência é conseqüência da convergência uniforme, mas a convergência pontual não implica a convergência uniforme.

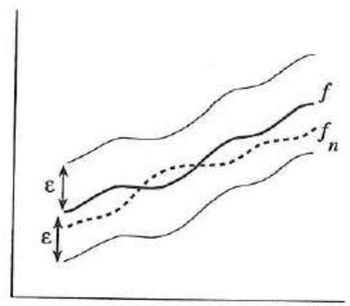

Figura 9.2

A convergência uniforme admite uma interpretação geométrica simples e sugestiva: ela significa que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um índice N a partir do qual os gráficos de todas as funções f_n ficam na faixa delimitada pelos gráficos das funções $f(x) + \varepsilon$ e $f(x) - \varepsilon$ (Fig. 9.2). Ao contrário, a convergência não sendo uniforme, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para uma infinidade de valores

n, o gráfico de f acaba saindo da faixa $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, centrada no gráfico de f. É esse o caso da seqüência $f_n(x) = x/n$, que converge para $f(x) = 0$ (x real), mas não uniformemente. Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o gráfico de qualquer f_n acaba saindo da faixa $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, centrada no eixo dos x, como se vê na Fig. 9.1.

Para negar a convergência uniforme, não é preciso que a desigualdade $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ seja violada *qualquer* que seja ε e para todo n, como aconteceu no exemplo anterior. Basta que essa violação ocorra para algum $\varepsilon > 0$ e para uma infinidade de índices n, como ilustra o exemplo a seguir.

9.3. Exemplo. Consideremos a função $f(x) = e^{-x^2}$, cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy e que tende a zero com $x \to \pm\infty$. Seja f_n a seqüência dada por $f_n(x) = f(x-n)$. Como se vê, o gráfico de f_n é o de f transladado n unidades para a direita (Fig. 9.3). É fácil ver, então, que $f_n(x) \to 0$ pontualmente. Mas essa convergência não é uniforme, pois $f_n(n) = 1$, de sorte que a condição $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ estará violada em $x = n$ com qualquer $\varepsilon < 1$. Entretanto, se nos restringirmos a qualquer semi-eixo $x \le c$, teremos uniformidade da convergência, visto que, a partir de $n \ge c$, $f_n(x) \le f_n(c) \le \exp[-(c-n)^2]$; ora, esta última expressão pode ser feita menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ a partir de um certo índice N, independentemente de x, desde que $x \le c$.

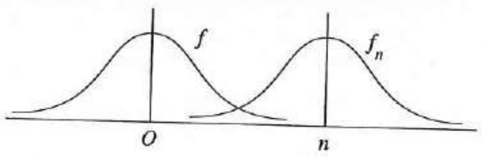

Figura 9.3

9.4. Teorema (Critério de convergência de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma seqüência de funções f_n convirja uniformemente para uma função f num domínio D é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que, qualquer que seja $x \in D$, se tenha:*

$$n > N \text{ e } m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Demonstração. Para provar que a condição é suficiente, observamos que (9.1) e o critério de Cauchy para seqüências numéricas garantem que, para cada x fixado, a seqüência numérica $f_n(x)$ converge para um certo número $f(x)$, de sorte que $f_n(x) - f_m(x)$ tende a $f_n(x) - f(x)$ com $m \to \infty$; portanto, passando ao limite em (9.1) com $m \to \infty$, obtemos

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon,$$

qualquer que seja $x \in D$, e isso prova a convergência uniforme de f_n para f. (O fato de havermos perdido a desigualdade estrita não importa; se quiséssemos terminar com $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, bastaria começar com $\varepsilon/2$ em (9.1), o que nos levaria a $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$.)

Deixamos ao leitor a tarefa de provar que a condição é necessária.

Exercícios

1. Prove que, qualquer que seja x, $\cos nx$ não tende a zero.

2. Mostre que $f_n(x) = 1/nx \to 0$ pontualmente em $x \neq 0$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $|x| \ge c > 0$. Faça os gráficos das $f_n(x)$ para entender o que acontece.

3. Prove que $f_n(x) = 1/(1+nx)$ tende a zero em $x \neq 0$, mas não uniformemente.

4. Mostre que as seqüências

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\log n} \quad \text{e} \quad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx + \cos nx)}{x^2 + n + 1}$$

tendem a zero uniformemente em x, para todo x real.

5. Mostre que a seqüência $f_n(x) = x^n$ tende a zero pontualmente no intervalo $[0,\ 1)$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[0,\ c]$, com $c < 1$. Faça o mesmo no caso dos intervalos $(-1,\ 1)$ e $[-c,\ c]$. Interprete sua análise geometricamente nos gráficos das funções f_n.

6. Faça os gráficos das funções da seqüência

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-n)x + 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ 1/n^2 x & \text{se} \quad x \ge 1/n \end{cases}$$

Mostre que essa seqüência tende a zero pontualmente em $x > 0$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer semi-eixo $x \ge c > 0$.

7. Prove que $f_n(x) = x^2/(1+nx^2)$ tende a zero uniformemente em toda a reta.

8. Prove que a seqüência $f_n(x) = x/(1+nx)$ tende a zero uniformemente em $x \ge 0$. Analise o comportamento dessa seqüência em $x < 0$.

9. Estude a seqüência $f_n(x) = nx/(1+nx)$ quanto à convergência simples e uniforme.

10. Determine o limite da seqüência $f_n(x) = nx^2/(1+nx)$ e prove que a convergência é uniforme em $x \ge 0$. Analise a situação em $x < 0$.

11. Mostre que a seqüência $f_n(x) = e^{x/n}$ tende a 1 pontualmente para todo x real, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[-c,\ c]$.

12. Mostre que a seqüência $f_n(x) = nxe^{-nx}$, considerada em $x \geq 0$, tende a zero pontualmente, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer semi-eixo $x \geq c > 0$.

13. Faça o mesmo que no exercício anterior para a seqüência $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$.

14. Estude a seqüência $f_n(x) = x/(1+nx^2)$ quanto à convergência simples e uniforme em toda a reta.

15. Considere a seqüência $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ no intervalo $[0,\ 1]$. Faça o gráfico de f_n, determinando, inclusive, seu valor máximo e o ponto x_n onde ele é assumido. Mostre que $f_n(x)$ tende a zero pontualmente, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer intervalo $[0,\ c]$, $c < 1$.

16. Faça o gráfico de $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ para todo $x \geq 0$ e mostre que essa seqüência converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $R_+ - V_\delta(1)$, com $\delta > 0$. (Aqui, como de costume, R_+ denota o conjunto dos números reais positivos.

17. Mostre que $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2) \to 0$ qualquer que seja x real, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio $|x| \geq c > 0$.

18. Prove que a seqüência

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2\log n}$$

tende a zero uniformemente, para todo x real.

Sugestões e soluções

1. Se $\cos nx$ tendesse a zero, o mesmo seria verdade de $\cos 2nx$. Como

$$\cos 2nx = \cos^2 nx - \operatorname{sen}^2 nx,$$

$\operatorname{sen} nx$ também tenderia a zero, o que é absurdo, pois $\operatorname{sen}^2 nx + \cos^2 nx = 1$.

2. Observe que $f_n(1/n) = 1/2$.

5. Observe que

$$x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \log x < \log\varepsilon \Leftrightarrow n > N = \frac{\log\varepsilon}{\log x}.$$

Vemos assim que para cada x fixado encontramos um N, mas esse N varia com o variar de x, tendendo a infinito com $x \to 1$ (estamos supondo $0 < \varepsilon < 1$); logo, a convergência é pontual, mas não uniforme. Com a restrição $0 < x \leq c < 1$,

$$\frac{\log\varepsilon}{\log x} \leq \frac{\log\varepsilon}{\log c},$$

de forma que basta tomar $N = \log\varepsilon/\log c$, para que tenhamos

$$n > N \Rightarrow x^n < \varepsilon.$$

7. Observe que $f_n(x) < 1/n$.

8. O caso $x \geq 0$ é análogo ao exercício anterior. No caso $x < 0$ não podemos permitir $x = -1/n$ em $f_n(x)$. Mas, qualquer que seja $c > 0$, com $n > 2/c$ e $x \leq -c$, teremos:

$$|1+nx| = n|x| - 1 > n|x| - n|x|/2 = n|x|/2 > nc/2,$$

donde segue a convergência uniforme.

9. A convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $|x| \geq c > 0$, como se vê analisando a diferença $1 - f_n(x)$. Observe que $f_n(1/n) = 1/2$, donde se vê que a convergência não pode ser uniforme em toda a reta.

10. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x+1/n} \to x$; $|f_n(x) - x| = |\dfrac{x}{1+nx}| < \dfrac{1}{n}$ se $x \geq 0$, o que prova que a convergência é uniforme nesse domínio. Se $x < 0$, como x não pode ser igual $a - 1/n$, pelo menos a partir de um certo n, podemos nos restringir a $x \leq c < 0$, onde, novamente, a convergência é uniforme, como o leitor deve provar.

14. f_n, que é função ímpar, assume valor máximo $1/2\sqrt{n}$ em $x_n = 1/\sqrt{n}$. Faça o gráfico de f_n para diferentes valores de n.

15. f_n assume seu valor máximo $1/4$ em $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$, que tende a 1 crescentemente. Compare os gráficos das diferentes funções f_n para valores crescentes de n.

16. Calcule as derivadas primeira e segunda de $f_n(x)$; verifique que a derivada primeira é sempre positiva e a derivada segunda se anula em $x_n = [(n-1)/(n+1)]^{1/n}$, que tende a 1 crescentemente. Compare os gráficos das diferentes funções f_n, para valores crescentes de n.

17. Observe que $f_n(\pm 1/n) = \pm 1/2$. Se $|x| \geq c > 0$, $|f_n(x)| \leq 1/n|x| \leq 1/nc$.

18. Observe que f_n é funcão ímpar e ache seu valor máximo.

9.2 Conseqüências da convergência uniforme

A convergência uniforme, como se vê, é mais restritiva que a convergência simples, por isso mesmo tem várias conseqüências importantes, como veremos a seguir.

9.5. Teorema. *Se f_n é uma seqüência de funções contínuas num mesmo domínio D, que converge uniformemente para uma função f, então f é contínua em D.*

Demonstração. Sejam $x,\ x' \in D$. A desigualdade do triângulo permite escrever:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x')) + (f_n(x') - f(x'))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')| \end{aligned}$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, a convergência uniforme permite determinar N tal que, para $n > N$, o primeiro e o último termo desta última expressão sejam cada um menor do que $\varepsilon/3$, quaisquer que sejam $x,\ x' \in D$. Feito isso, fixamos o índice n e usamos a continuidade de f_n para determinar $\delta > 0$ tal que $x,\ x' \in D,\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon/3$. Assim, obtemos

$$x,\ x' \in D,\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração.

De acordo com o teorema que acabamos de demonstrar, se o limite de uma seqüência de funções contínuas num domínio D não é uma função contínua nesse domínio, então a convergência certamente não é uniforme. É esse o caso da seqüência $x^n/(1 + x^n)$ que, como vimos no Exercício 16 atrás, converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

que é descontínua; logo, a convergência não pode ser uniforme em qualquer intervalo que inclua o ponto $x = 1$. Do mesmo modo, a seqüência x^n não converge uniformemente no intervalo $[0,\ 1]$, pois a função limite é 1 em $x = 1$ e zero em $x < 1$.

Deve-se notar também que uma seqüência de funções contínuas pode convergir para uma função contínua, sem que a convergência seja uniforme, como nos Exercícios 3, 5 e 6 atrás, dentre outros.

9.6. Teorema. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, sendo D um intervalo $[a,\ b]$, temos:*

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração. Da convergência uniforme segue-se que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe N tal que $n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$; logo, $n > N$ implica

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx \right|,$$

donde

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon(b - a).$$

Isto prova o resultado desejado.

O teorema que acabamos de provar nos diz que podemos trocar a ordem das operações de integração e de tomar o limite com $n \to \infty$, desde que a convergência seja uniforme. Ele foi demonstrado no pressuposto de que as funções f_n fossem todas contínuas no intervalo $[a,\ b]$. Mas tal hipótese nem é necessária; basta, além da convergência uniforme, que as funções f_n sejam integráveis em $[a,\ b]$, mas não vemos tratar este caso aqui.

9.7. Teorema. *Seja f_n uma seqüência de funções com derivadas contínuas num intervalo $[a,\ b]$, tal que f'_n converge uniformemente para uma função g. Suponhamos ainda que num ponto $c \in [a,\ b]$ a seqüência numérica $f_n(c)$ converge. Então, f_n converge uniformemente para uma função f, que é derivável, com $f' = g$.* Esta última relação também se escreve

$$\frac{d}{dx} \lim f_n(x) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Demonstração. O teorema fundamental do Cálculo permite escrever

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t)dt; \tag{9.2}$$

e como a convergência $f'_n \to g$ é uniforme, podemos passar ao limite sob o sinal de integração, o que prova que $f_n(x)$ tem por limite uma função $f(x)$, dada por

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt. \tag{9.3}$$

Daqui segue que $f' = g$.

Falta apenas provar que $f_n \to f$ uniformemente. De (9.2) e (9.3),

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(c) - f(c)| + \left|\int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt\right|. \tag{9.4}$$

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $t \in [a, b]$,

$$n > N \Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon.$$

Daqui e de (9.4) obtemos: $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon[1 + (b - a)]$, o que completa a demonstração.

O leitor deve notar que a hipótese de convergência uniforme, não da seqüência original f_n, mas da seqüência de derivadas f_n', foi decisiva na demonstração deste último teorema; e sem ela não podemos chegar à mesma conclusão. Por exemplo, a seqüência $f_n(x) = \operatorname{sen} nx/n$ converge uniformemente para zero, mas $f_n'(x) = \cos nx$ nem sequer converge, como vimos no Exercício 1 atrás.

Séries de funções

Os conceitos de convergência simples e uniforme de seqüências transferem-se naturalmente para séries, interpretadas estas como seqüências de *reduzidas* ou *somas parciais*. Assim, a *convergência uniforme* de uma série de funções,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots,$$

significa a convergência uniforme da seqüência de somas parciais ou reduzidas de ordem n,

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x).$$

Portanto, diz-se que uma série de funções, $\sum f_n(x)$, converge uniformemente num domínio D para uma soma $f(x)$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, qualquer que seja $x \in D$,

$$n > N \Rightarrow |f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| < \varepsilon.$$

Os Teoremas 9.4 a 9.7, com suas respectivas demonstrações, podem ser facilmente adaptados a séries de funções, resultando nos teoremas 9.8 a 9.10 enunciados a seguir, e cujas demonstrações ficam a cargo do leitor.

9.8. Teorema (Critério de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum f_n(x)$, onde os termos f_n são funções com o mesmo domínio D, convirja uniformemente é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista N tal que*

$$n > N \Rightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

qualquer que sejam p inteiro positivo e $x \in D$.

9.9. Teorema. *Uma série de funções contínuas, que converge uniformemente num intervalo, tem por soma uma função contínua; e pode ser integrada termo a termo.*

9.10. Teorema. *Se uma dada série de funções $\sum f_n(x)$ é tal que a série de derivadas $\sum f_n'(x)$ converge uniformemente num intervalo, e se a série original converge num ponto desse intervalo, então sua soma f é derivável nesse intervalo e a derivação de f pode ser feita derivando termo a termo a série dada.*

O teorema seguinte, conhecido como *teste M de Weierstrass*, é um critério muito útil para verificar se uma dada série de funções converge uniformemente.

9.11. Teorema (teste M de Weierstrass). *Seja f_n uma seqüência de funções com o mesmo domínio D, satisfazendo a condição $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in D$, onde $\sum M_n$ é uma série numérica convergente. Então a série $\sum f_n(x)$ converge absoluta e uniformemente em D.*

Demonstração. É claro que a série de funções converge para uma certa função $f(x)$, e converge absolutamente, devido à dominação $|f_n(x)| \leq M_n$ e do fato de ser convergente a série $\sum M_n$. A convergência desta série garante que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n > N \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \varepsilon.$$

Então, para todo x em D,

$$n > N \Rightarrow |f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \varepsilon,$$

e isto prova a uniformidade da convergência e conclui a demonstração do teorema.

Outra demonstração pode ser feita com base no critério de Cauchy: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $x \in D$,

$$n > N \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon.$$

Na aplicação do teste de Weierstrass, basta, evidentemente, que a série dada seja dominada pela série numérica a partir de um certo índice N, não necessariamente $N = 1$.

9.12. Exemplo. A série $\sum \dfrac{\operatorname{sen} nx}{(n+1)n!}$ converge uniformemente em toda a reta, pois é dominada pela série numérica convergente $\sum 1/n!$ Portanto, ela define uma função contínua f. Além disso, a série de derivadas também converge uniformemente, como é fácil ver, donde concluímos que f é derivável e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+1)(n-1)!}.$$

Como se vê, temos aqui um exemplo de função definida por uma série. Muitas funções importantes nas aplicações são assim definidas, por meio de séries de funções. Isso acontece tipicamente na solução de equações diferenciais por meio de séries.

Exercícios

1. Prove que a seqüência $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ não converge uniformemente em $[0, 1]$, verificando que
$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 [\lim f_n(x)]dx.$$

Nos Exercícios 2 a 5, prove que a série dada converge absoluta e uniformemente no domínio indicado.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ em $\mathbf{R}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2 + \cos nx}$ em $\mathbf{R}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n^3(2 - \cos x)}}$ em $\mathbf{R}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ em $x \geq 0$.

6. Prove que a série $\sum x^n/(1 + x^n)$ converge absoluta e uniformemente em qualquer intervalo $|x| \leq c < 1$, mas não em $(-1, 1)$. Prove que ela define uma função contínua em todo o intervalo $(-1, 1)$.

7. Prove que a função $f(x) = \sum x^n/(1 + x^n)$, definida no intervalo $(-1, 1)$, tende a ∞ com $x \to 1$ e a $-\infty$ com $x \to -1$.

8. Prove que $\sum 1/(1 + n^2 x)$ define uma função contínua em R, excetuados $x = 0$ e os pontos da forma $-1/n^2$, com n inteiro. Prove também que essa função é derivável, com derivada dada pela série obtida por derivação termo a termo da série original.

9. Faça o mesmo que no exercício anterior no caso da série $\sum 1/(n^2 - x^2)$, os pontos omitidos neste caso sendo os inteiros.

10. Estude a função definida pela série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$$
quanto à continuidade e derivabilidade termo a termo.

11. Faça o mesmo que no exercício anterior no caso da série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \operatorname{sen} \frac{x}{n}\right).$$

12. Seja $\sum f_n(x)$ uma série de funções positivas, contínuas e não decrescentes num intervalo $[a, b]$, tal que $\sum f_n(b)$ converge. Prove que a série dada converge uniformemente e que sua soma é integrável, logo,
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

13. Prove que $\sum e^{-nx}/n$ converge uniformemente em qualquer semi-eixo do tipo $x \geq c > 0$, logo, é uma função contínua em $x > 0$. Prove que essa função tende a infinito com $x \to 0$.

Sugestões e soluções

5. Aplique o teste M de Weierstrass, notando que $x^n e^{-nx} = e^{-n(x - \log x)} \leq e^{-n}$, pois $x - \log x$ atinge seu mínimo em $x = 1$.

6. Observe que $|x^n/(1+x^n)| \le c^n/(1-c)$ e aplique o teste M de Weierstrass. Se a convergência fosse uniforme em $|x| < 1$, pelo critério de Cauchy, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existiria N tal que $n > N$ implicaria

$$\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Ora, com n par, suficientemente grande, existe x nesse intervalo, muito próximo de 1 ou de -1 ($x = x_n = 1/\sqrt[n]{2}$), fazendo o primeiro membro da expressão acima igual a $1/3$. Que a série define uma função contínua em $|x| < 1$ é evidente, pois qualquer elemento desse intervalo está em algum $[-c, c]$, com $c < 1$.

7. Fixado $x \in (0, 1)$, $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ é uma seqüência numérica decrescente; logo, $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n/(1+x^n) > Nx^N/(1+x^N)$. Isso permite mostrar que existe uma vizinhança de $x = 1$, onde $S_N(x) > N/3$. Para provar que $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$, considere $-S_{2N}(x)$, em $x = -y$, com $y \to 1$:

$$-S_{2N}(-y) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y^{2n-1}}{1-y^{2n-1}} - \frac{y^{2n}}{1+y^{2n}}\right) > Ny^{4N-1}.$$

Isto pode ser feito maior do que $N/2$ com y numa vizinhança de 1.

8. Considere primeiro x positivo. Em qualquer semi-eixo $x \ge c > 0$,

$$\frac{1}{1+n^2x} < \frac{1/c}{n^2} \quad \text{e} \quad D\left(\frac{1}{1+n^2x}\right) = \frac{-n^2}{(1+n^2x)^2} > \frac{-1/c^2}{n^2},$$

donde se prova, com o teste M de Weierstrass, a convergência uniforme da série original e da série de derivadas. Qualquer $x > 0$ está em algum semi-eixo $x \ge c > 0$, o que prova a continuidade da soma da série e sua derivabilidade termo a termo. Se $x \le -c < 0$, tomamos n grande o suficiente para que $1 < n^2c/2$, donde

$$\left|\frac{1}{1+n^2x}\right| = \frac{1}{n^2|x|-1} \le \frac{1}{n^2c-1} < \frac{2/c}{n^2}.$$

9. Considere x restrito a um intervalo $[a, b]$ que não contenha número inteiro e prove que aí a convergência é uniforme, tanto da série original como da série de derivadas.

10. Observe que

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \to \frac{1}{2} \quad \text{com} \quad x \to 0.$$

Então, sendo $|x| \le M$ e n suficientemente grande, a série dada é dominada pela série $\sum M^2/n^2$. A série de derivadas, $\sum (1/n)\operatorname{sen}(x/n)$ também converge absoluta e uniformemente no mesmo intervalo $|x| \le M$, pois, a partir de um certo índice N, a correspondente série de módulos é dominada por $\sum 2M/n^2$.

11. Como no exercício anterior, estude $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

9.3 Séries de potências

Dentre as séries de funções, desempenham papel especial as chamadas *séries de potências* ou *séries de Taylor*, que são séries do tipo $\sum a_n(x-x_0)^n$, onde x_0 e os coeficientes a_n são constantes. Como se vê, elas são séries de potências de $x - x_0$. Dizemos que elas são centradas em x_0, têm centro em x_0, ou que são séries de potências com referência a x_0.

Sem nenhuma perda de generalidade, no estudo dessas séries podemos fazer $x_0 = 0$, considerando então séries do tipo $\sum a_n x^n$. Evidentemente, todos os resultados estabelecidos para estas séries podem ser facilmente traduzidos para aquelas com a substituição de x por $x - x_0$.

9.13. Lema. *Se a série de potências $\sum a_n x^n$ converge num certo ponto $x = x_0 \ne 0$, ela converge absolutamente em todo ponto x do intervalo $|x| < |x_0|$; e se a série diverge em $x = x_0$, ela diverge em todo x fora desse intervalo, isto é, em $|x| > |x_0|$.*

Demonstração. Se a série converge em x_0, seu termo geral, $a_n x_0^n$, tende a zero; portanto, é limitado por uma constante M. Em conseqüência,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Isso mostra que a série $(1/M)\sum |a_n x^n|$ é dominada pela série geométrica de termo geral $|x/x_0|^n$, que é convergente se $|x| < |x_0|$; logo, $\sum |a_n x^n|$ converge no intervalo $|x| < |x_0|$.

Se a série $\sum a_n x^n$ diverge em $x = x_0$, ela não pode convergir quando $|x| > |x_0|$, senão, pelo que acabamos de provar, teria de convergir em $x = x_0$, o que completa a demonstração.

Uma série de potências $\sum a_n x^n$ pode convergir somente em $x = 0$, como é o caso da série $\sum n!x^n$; ou pode convergir em qualquer valor x, como se dá com a série $\sum x^n/n!$ Excluídos esses dois casos extremos, é fácil provar, como faremos no teorema seguinte, que existe um número positivo r tal que a série converge se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

9.14. Teorema. *A toda série de potências $\sum a_n x^n$, que converge em algum valor $x' \neq 0$ e diverge em algum outro valor x'', corresponde um número positivo r tal que a série converge absolutamente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.*

Demonstração. Seja r o supremo dos números $|x|$, x variando entre os valores onde a série converge. É claro que r é um número positivo, com $|x'| < r$; e $r < |x''|$ (pois, se $|x''| < r$, haveria x entre $|x''|$ e r, onde a série convergiria; e, pelo lema anterior, ela teria de convergir também em x'', o que é absurdo). Se x é tal que $|x| < r$, existe x_0 onde a série converge, com $|x| < |x_0| \leq r$. Então, pelo lema anterior, a série converge absolutamente em x. A série diverge em x com $|x| > r$, senão, pelo mesmo lema, teria de convergir em todo y com $|x| > |y| > r$ e r não seria o supremo anunciado.

Raio de convergência

O número r introduzido no teorema anterior é chamado o raio de convergência da série. Essa denominação se justifica porque o domínio natural de estudo das séries de potências é o plano complexo, e quando x varia no plano complexo, o conjunto $|x| < r$ é um círculo de centro na origem e raio r. Demonstra-se então que a série converge no interior do círculo e diverge em seu exterior. Todavia, em nosso estudo só vamos considerar x real; mas, mesmo assim, pelas razões expostas, chamaremos r de "raio de convergência".

O Teorema 9.14 garante a convergência absoluta no intervalo aberto $|x| < r$, nada afirmando sobre os extremos $-r$ e $+r$. É fácil dar exemplos ilustrativos de todas as possibilidades. Assim, as séries

$$\sum \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum \frac{x^n}{n} \quad \text{e} \quad \sum x^n$$

têm todas o mesmo raio de convergência, $r = 1$, como se constata facilmente, verificando que elas convergem quando $|x| < 1$ e divergem quando $|x| > 1$. A primeira converge em -1 e $+1$, a segunda converge em -1 e diverge em $+1$, e a terceira diverge nos dois extremos $x = \pm 1$.

A definição de "raio de convergência"como supremo dos números $|x|$, x variando entre os valores onde a série converge, se estende a todas as séries, podendo ser zero ou infinito, como é o caso das séries $\sum n!x^n$ e $\sum x^n/n!$ respectivamente. É fácil ver, nestes dois casos, que as afirmações do Teorema 9.14 permanecem válidas, com as devidas adaptações: se $r = 0$, a série diverge para todo $x \neq 0$; e se $r = \infty$, a série converge para todo x.

O raio de convergência pode ser facilmente calculado quando existe o limite de $|a_{n+1}/a_n|$. De fato, neste caso, pelo critério da razão, a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente se

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right|$$

for menor do que 1; e divergente se esse limite for maior do que 1. Resulta daí que o raio de convergência da série considerada é

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

(mesmo que esse limite seja zero ou infinito), pois a série converge se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

Propriedades das séries de potências

9.15. Teorema. *Toda série de potências $\sum a_n x^n$, com raio de convergência $r > 0$ (r podendo ser infinito), converge uniformemente em todo intervalo $[-c, c]$, onde $0 < c < r$.*

Demonstração. Fixado $c < r$, seja x_0 um número compreendido entre c e r. Como a série converge absolutamente em x_0, existe M tal que $|a_n x_0^n|$ é limitado por uma constante M; logo, sendo $|x| \leq c$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \, |\frac{x}{x_0}|^n \leq M |\frac{c}{x_0}|^n.$$

Isso mostra que a série $\sum |a_n x^n|$ é dominada pela série numérica convergente $\sum M|c/x_0|^n$. Então, pelo teste de Weierstrass, $\sum |a_n x^n|$ converge uniformemente em $|x| \leq c$, como queríamos provar.

Observe que o teorema anterior garante a convergência uniforme em qualquer intervalo $|x| \leq c$ contido no intervalo $|x| < r$, mas não neste último, que é a união daqueles. Como exemplo, considere a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

cujo raio de convergência é $r = 1$. Mas a convergência não é uniforme em todo o intervalo $|x| < 1$. Com efeito, pondo

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x},$$

temos:

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

É claro que, dado $\varepsilon > 0$, não existe N tal que para $n > N$ esta última expressão seja menor que ε para todo x em $(-1,\ 1)$; basta pensar numa seqüência x_n tendendo a 1, com $|x_n|^{n+1}$ mantendo-se maior ou igual a um número c tal que $0 < c < 1$. Por exemplo, $x_n = c^{1/(n+1)}$.

9.16. Teorema da unicidade de séries de potências. *Se uma função f admite desenvolvimento em série de potências num ponto x_0, esse desenvolvimento é único.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha dois desenvolvimentos numa vizinhança da origem, $|x| < r$:

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n x^n.$$

Essas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo, na referida vizinhança, em particular, em $x = 0$, donde segue que $a_n = b_n$ para todo n, o que prova o teorema.

Se uma função tem série de potências relativamente a um centro x_0, não importa que método empreguemos para obter essa série, já que ela é única pelo teorema que acabamos de demonstrar. Muitas séries são obtidas a partir de seus polinômios de Taylor, como no exemplo a seguir. Outro modo eficaz de obter séries de potências consiste em integrar séries já conhecidas; assim podem ser obtidas as séries em potências de x de $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arcsen} x$, considerados nos exercícios propostos adiante.

9.17. Exemplo. Os desenvolvimentos de várias funções em séries de potências são freqüentemente obtidos de seus desenvolvimentos de Taylor, bastando para isso verificar que o resto $R_n(x)$ tende a zero com $n \to \infty$. Por exemplo, sabemos do Cálculo que a função e^x tem desenvolvimento de Taylor dado por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = \dfrac{e^{c+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$ e c é um número compreendido entre zero e x. Então,

$$|R_n(x)| \le \frac{e^{x+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Esta estimativa de $R_n(x)$ nos mostra que tal resto tende a zero com $n \to \infty$, qualquer que seja x, donde podermos concluir que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

desenvolvimento este que é válido para todo x real. Portanto, de acordo com o Teorema 9.15, a convergência dessa série é uniforme em todo intervalo $[-c,\ c]$.

De modo inteiramente análogo obtemos os desenvolvimentos de seno e cosseno, propostos como Exercícios 8 e 9 adiante.

Exercícios

Calcule o raio de convergência de cada uma das séries dadas nos Exercícios 1 a 6.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$. **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{3})^{2n}(x+2)^n$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,x^n$. **5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3^n/n^3)x^n$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+1)^n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}$.

7. A chamada *série hipergeométrica*, dada por $F(a,\ b,\ c;\ x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n$, onde o símbolo $(r)_n$ significa $r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)$, engloba várias funções importantes da Física Matemática. Supondo que nenhum dos números a, b, c seja um inteiro negativo, prove que o raio de convergência dessa série é 1.

Obtenha os desenvolvimentos dados nos Exercícios 8 a 15, indicando, em cada caso, o domínio de convergência da série.

8. $\displaystyle \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9. $\displaystyle \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

10. $\displaystyle \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

11. $\displaystyle \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

12. $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$.

13. Série binomial: $(1+x)^r = 1+rx+\dfrac{r(r-1)}{2!}x^2+\dfrac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n$.

14. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. Faça $x = 1$ e obtenha o seguinte resultado, conhecido como *série de Leibniz*: $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$.

15. $\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2!2^2\cdot 5}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}$.

Sugestões

4. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{1/n} \dfrac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n+1]{n+1}} \to \dfrac{1}{e}$.

5. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^3 \to \dfrac{1}{3}$.

9.4 As funções trigonométricas

As funções trigonométricas costumam ser definidas, tanto no ensino médio como nas disciplinas de Cálculo, a partir de fatos geométricos elementares. O mesmo acontece com o estudo das propriedades dessas funções, em particular o cálculo de suas derivadas, tudo feito com bastante apêlo à intuição geometrica.

Veremos agora como isso pode ser feito de maneira puramente analítica, de forma que a fundamentação de toda a Trigonometria fique sendo puramente numérica, sem depender da Geometria. Para isso é suficiente tratar das funções seno e cosseno, já que estas duas fundamentam todas as demais funções trigonométricas.

Começamos observando que para obter as séries de potências dos Exercícios 8 e 9 atrás basta supor que existam duas funções $s(x)$ e $c(x)$ de classe C^1 em toda a reta, e tais que

$$s'(x) = c(x), \quad c'(x) = -s(x), \quad s(0) = 0, \quad c(0) = 1. \tag{9.5}$$

De fato, se existirem duas tais funções, elas serão de classe C^∞ em toda a reta; além disso, é fácil provar que $s^2(x) + c^2(x) = 1$ (Exercício 1 adiante), donde

$|s(x)| \le 1$ e $|c(x)| \le 1$. Em conseqüência, essas funções têm desenvolvimentos de Taylor, com restos que tendem a zero com $n \to \infty$, qualquer que seja x. Fazendo $n \to \infty$ nesses desenvolvimentos, obtemos as séries já mencionadas e aqui repetidas:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{9.6}$$

É facil verificar que essas séries convergem qualquer que seja x; portanto, realmente definem funções $s(x)$ e $c(x)$ de classe C^∞ em toda a reta, podem ser derivadas termo a termo e satisfazem as propriedades (9.5). E elas são o único par de funções satisfazendo (9.5) (Exercício 2 adiante). Em vista disso, tais funções serão usadas a partir de agora como definição de seno e cosseno, isto é, passaremos a escrever $\operatorname{sen} x$ em lugar de $s(x)$ e $\cos x$ em lugar de $c(s)$. Repare ainda, de acordo com o Teorema 9.15, que as séries em (9.6) convergem uniformemente em qualquer intervalo $[-c, c]$.

Das fórmulas (9.6) segue imediatamente que $\cos x$ é uma função par e $\operatorname{sen} x$ é ímpar. Provam-se também as seguintes "fórmulas de adição de arcos":

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b, \tag{9.7}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \tag{9.8}$$

Todos as fórmulas e resultados da trigonometria seguem das identidades fundamentais obtidas acima.

Vamos provar que existe um número $c > 0$ tal que, à medida que x cresce de zero a c, $\operatorname{sen} x$ cresce de zero a 1 e $\cos x$ decresce de 1 a zero. Definiremos o número π como sendo igual a $2c$, donde $c = \pi/2$.

Começamos observando que $\cos x > 0$ em toda uma vizinhança da origem, pois é função contínua e positiva em $x = 0$; e como $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, vemos que $\operatorname{sen} x$ é crescente logo à direita da origem, portanto, positiva, já que $\operatorname{sen} 0 = 0$. E como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, $\cos x$ é decrescente logo à direita da origem.

Vamos provar que $\cos x$ se anula em algum ponto à direita da origem. Supondo o contrário, pelo teorema do valor intermediário, $\cos x > 0$ para $x \ge 0$; portanto, $\operatorname{sen} x$ é estritamente crescente e $\cos x$ estritamente decrescente em $x > 0$. Fixado qualquer $a > 0$, teríamos:

$$0 < \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a < \cos^2 a;$$

e, por indução, $\cos 2^n a < (\cos a)^{2^n}$ para todo n inteiro positivo. Concluímos que $\cos 2^n a \to 0$, já que $\cos a < 1$. Em conseqüência, existe $b > 0$ tal que

$\cos^2 b < 1/2$ e $\text{sen}^2 b > 1/2$; logo,

$$\cos 2b = \cos^2 b - \text{sen}^2 b < 0,$$

que contradiz a suposição inicial de que $\cos x$ não se anula em $x > 0$.

Existem, pois, raízes de $\cos x = 0$ em $x > 0$. Seja c o ínfimo dessas raízes. É claro que $c > 0$; e $\cos c = 0$ pela continuidade de $\cos x$. Como esta função é positiva em $0 \le x < c$, $\text{sen}\, x$ é crescente nesse intervalo, portanto, $\text{sen}\, c = 1$. Pomos agora $\pi = 2c$. Em resumo, quando x varia de zero a $\pi/2$, $\text{sen}\, x$ cresce de zero a 1 e $\cos x$ decresce de 1 a zero.

Uma vez definidas as funções seno e cosseno, as demais funções trigonométricas, bem como todas as inversas, são definidas e estudadas de maneira óbvia, como o leitor deve reconhecer sem dificuldades. Algumas dessas questões são propostas nos exercícios.

Exercícios

1. Prove que se $s(x)$ e $c(x)$ são duas funções de classe C^1 satisfazendo (9.5), então $s^2(x) + c^2(x) = 1$.

2. Prove que (9.6) é o único par de funções $s(x)$ e $c(x)$ de classe C^1 satisfazendo (9.5).

3. Prove as fórmulas (9.7) e (9.8).

4. Prove que $\text{sen}\, \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\text{sen}\, 3\pi/2 = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$, $\text{sen}\, 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$, $\text{sen}(x - \pi/2) = \cos x$ e $\cos(x - \pi/2) = \text{sen}\, x$.

5. Prove que $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ são funções periódicas de período 2π. Prove também que 2π é o menor período positivo dessas funções. Faça os gráficos dessas funções.

6. Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$.

7. Mostre que a função $\text{sen}\, x$, restrita ao intervalo $|x| < \pi/2$, é invertível; e que sua inversa tem derivada $(1 - x^2)^{-1/2}$. Repita o exercício restringindo a função $\text{sen}\, x$ ao intervalo$[\pi/2,\ 3\pi/2]$; agora a derivada deverá ser $-(1 - x^2)^{-1/2}$.

8. Mostre que a função $\cos x$, restrita ao intervalo $0 < x < \pi$, é invertível; e que sua inversa tem derivada $-(1 - x^2)^{-1/2}$. Como no exercício anterior, repita a questão, começando com a função $\cos x$ restrita ao intervalo $[\pi,\ 2\pi]$.

9. Defina $\text{tg}\, x = \text{sen}\, x / \cos x$ e faça o gráfico dessa função. Prove que, restrita ao intervalo $|x| < \pi$, ela é invertível; e que sua inversa, $\text{arctg}\, x$, tem derivada $(1+x^2)^{-1}$. O número π pode ser calculado por integração numérica dessa derivada entre $x = 0$ e $x = +\infty$.

Sugestões

1. Derive $f(x) = s^2(x) + c^2(x)$ e note que $f(0) = 1$.

2. Suponha que existisse outro par de funções. S e C, nas mesmas condições de s e c, respectivamente. Mostre que $sC - Sc = a$ e $sS + cC = b$ são constantes; $a = 0$, $b = 1$. Tendo em conta que $s^2 + c^2 = 1$, obtenha $as + bc = C$ e $bs - ac = S$. Daqui segue, com $x = 0$, que $S(x) = s(x)$ e $C(x) = c(x)$.

3. Ponha
$$f(x) = \text{sen}(x + b) - \text{sen}\, x \cos b - \cos x\, \text{sen}\, b,$$
$$g(x) = \cos(x + b) - \cos x \cos b + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, b;$$
e verifique que $f' = g$ e $g' = -f$, e que $f^2 + g^2 = 0$. Conclua, pela continuidade, que $f \equiv g \equiv 0$.

5. Se p e p' são períodos, também o são $-p$ e $p + p'$. Mostre que se p é um período entre zero e 2π, então existe um período menor do que π e outro menor do que $\pi/2$.

9.5 Notas históricas e complementares

As séries de potências

As séries de potências começaram a surgir logo no início do Cálculo, no século XVII. Assim, Newton obteve a série geométrica

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

por divisão direta do numerador 1 pelo denominador $1 - x$. E obteve a série do logaritmo,

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n},$$

integrando termo a termo a série anterior. Isso aconteceu por volta de 1665, no contexto de calcular áreas sob a hipérbole, mas tais resultados só foram publicados posteriormente. Nicolaus Mercator, apoiando-se nos resultados de Gregorius Saint Vincent, obteve a mesma série do logaritmo em 1668, daí essa série ser às vezes chamada "série de Newton-Mercator".

Newton obteve muitas outras séries de potências por esse mesmo método de expandir certas funções simples e integrar termo a termo. Por exemplo, aplicando esse procedimento à série

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

obtemos a série de $\text{arctg}\, x$:

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} x^{2n+1}.$$