6.2 Limite e continuidade

Noções topológicas

Sempre que falarmos em "número" sem qualquer qualificação, entenderemos tratar-se de um número real. Como os números reais são representados por pontos de uma reta, através de suas abscissas, é costume usar a palavra "ponto" em lugar de "número"; assim, "ponto x" significa "número x".

Diz-se que um ponto x é *ponto interior* de um dado conjunto C, ou *ponto interno* a C, se esse conjunto contém um intervalo (a, b), o qual, por sua vez,

contém x, isto é, $x \in (a, b) \subset C$. Segundo essa definição, todos os elementos de um intervalo aberto são pontos interiores desse intervalo. O *interior* de um conjunto C é o conjunto de todos os seus pontos interiores. Assim, o intervalo (a, b) é seu próprio interior; é também o interior do intervalo fechado $[a, b]$.

Diz-se que um conjunto C é *aberto* se todo ponto de C é interior a C, isto é, se o conjunto coincide com seu interior. É esse o caso de um intervalo (a, b), do tipo que já vinha sendo chamado "aberto".

Já definimos "vizinhança ε" na p. 75. De um modo geral, *vizinhança* de um ponto é qualquer conjunto que contenha a internamente. Mas, a menos que o contrário seja dito explicitamente, "vizinhança" para nós significará sempre um intervalo aberto. Em particular, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é uma vizinhança de a, chamada naturalmente *vizinhança simétrica* de a, ou *vizinhança* ε de a. Às vezes interessa considerar uma vizinhança ε de a, excluído o próprio ponto a, a chamada *vizinhança perfurada*. Vamos denotá-la $V'_\varepsilon(a)$:

$$V'_\varepsilon(a) = V_\varepsilon(a) - \{a\} = \{x\colon 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Diz-se que um número a é *ponto de acumulação* de um conjunto C se toda vizinhança de a contém infinitos elementos de C. Isso equivale a dizer que (veja o Exercício 1 adiante) *toda vizinhança de a contém algum elemento de C diferente de a*; ou ainda, *dado $\varepsilon > 0$, $V'_\varepsilon(a)$ contém algum elemento de C*.

Um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto; por exemplo, os extremos a e b de um intervalo aberto (a, b) são pontos de acumulação desse intervalo, mas não pertencem a ele. Todos os pontos do intervalo também são seus pontos de acumulação e pertencem a ele.

Um ponto x de um conjunto C diz-se *isolado* se não for ponto de acumulação de C. Isso é equivalente a dizer que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V'_\varepsilon(x)$ não contém qualquer elemento de C. Chama-se *discreto* todo conjunto cujos elementos são todos isolados. Por exemplo, o conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1} \ldots\right\}$$

é discreto, pois seus pontos são todos isolados. Seu único ponto de acumulação é o número 1, que não pertence ao conjunto.

Diz-se que um número x é *ponto aderente* a C, se qualquer vizinhança de x contém algum elemento de C. Isso significa que x pode ser um elemento de C ou não, mas se não for certamente será ponto de acumulação de C. O leitor deve tomar cuidado para não confundir ponto de aderência com ponto de acumulação. No caso de seqüências, um ponto de aderência (p. 96) pode ou não coincidir com um elemento da seqüência; e se não coincidir, será ponto de acumulação do conjunto de valores da seqüência.

O conjunto dos pontos aderentes a C é chamado o *fecho* ou *aderência* de C, denotado com o símbolo $\overline{C}$. Como se vê, $\overline{C}$ é a união de C com o conjunto C' de seus pontos de acumulação. Por exemplo, o fecho do conjunto A considerado há pouco é o conjunto

$$B = A \cup \{1\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}, \ldots,\ \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

Diz-se que um conjunto é *fechado* quando ele coincide com seu fecho ($C = \overline{C} = C \cup C'$), ou seja, quando ele contém todos os seus pontos de acumulação: $C' \subset C$. É esse o caso de um intervalo $[a,\ b]$, do tipo que já vinha sendo chamado "fechado". É também fechado o conjunto B que acabamos de considerar.

Vamos introduzir uma noção referente a dois conjuntos A e B, que é utilizada com freqüência quando $A \subset B$, embora esta condição não seja necessária na definição que vamos dar. Diz-se que um conjunto A é *denso* num conjunto B se todo ponto de B que não pertencer a A é ponto de acumulação de A. Dito de outro modo, todo ponto de B ou já está em A ou é ponto de acumulação de A, de sorte que se juntarmos a A seus pontos de acumulação, o conjunto resultante conterá B. Em particular, A ser denso em $\mathbf{R}$ significa que todo número real é ponto de acumulação de A. Por exemplo, o conjunto $\mathbf{Q}$ é denso em $\mathbf{R}$; também é denso em $\mathbf{R}$ o conjunto dos números irracionais.

As definições de limite e continuidade

Historicamente, o conceito de limite é posterior ao de derivada. Ele surge da necessidade de calcular limites de razões incrementais que definem derivadas. E esses limites são sempre do tipo $0/0$. Por aí já se vê que os exemplos interessantes de limites devem envolver situações que só começam a aparecer no Cálculo depois que o aluno adquire familiaridade com funções mais complicadas, como as funções trigonométricas. Aliás, os primeiros limites interessantes a ocorrer no Cálculo são os das funções

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1 - \cos x}{x}, \tag{6.1}$$

com x tendendo a zero. Isso acontece no cálculo da derivada da função $y = \operatorname{sen} x$. Mais tarde, no estudo das integrais impróprias, surge a necessidade de considerar limites de funções como

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-t}}\,dt, \tag{6.2}$$

com x tendendo a 1.

Observe que, em todos esses casos e outros parecidos, a variável x deve aproximar um certo valor, *sem nunca coincidir com esse valor*; e que o valor do qual x se aproxima deve ser ponto de acumulação do domínio da função. Essas observações ajudam a bem compreender a definição que damos a seguir.

6.2. Definição. *Dada uma função f com domínio D, seja* a *um ponto de acumulação de D* (que pode ou não pertencer a D). *Diz-se que um número L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D,\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Para indicar isso escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \lim_{x \to a} f(x) = L, \quad f(x) \to L \text{ com } x \to a,$$

ou $\lim f(x) = L$, *omitindo a indicação "$x \to a$" quando for óbvia.*

A condição (6.3) pode ainda ser escrita das seguintes três maneiras equivalentes:

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$$

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L).$$

A Definição 6.2 costuma ser chamada a *definição ε-δ* de limite, por razões óbvias. Há uma outra maneira equivalente de definir limite, a chamada *definição sequencial de limite*, caracterizada no Teorema 6.10 adiante.

A exclusão do ponto $x = a$ na definição de limite é natural, pois o limite L nada tem a ver com o valor $f(a)$, como vemos pelos muitos exemplos concretos, como em (6.1) e (6.2). O conceito de limite é introduzido para caracterizar o comportamento da função $f(x)$ nas proximidades do valor a, porém mantendo-se sempre diferente de a. Assim, podemos mudar o valor da função no ponto como quisermos, sem que isso mude o valor do limite, e é assim mesmo que deve ser. Agora, se a função já está definida em a, e seu valor aí coincide com seu limite, então ocorrerá a continuidade no ponto. É por isso mesmo que, quando a função ainda não está definida, mas tem limite num ponto a, costuma-se defini-la nesse ponto como sendo o valor do limite. É o que fazemos em exemplos como (6.1) e (6.2).

Sempre que nos referirmos ao limite de uma função com $x \to a$ deve-se entender que a é ponto de acumulação do domínio D da função, mesmo que isso não seja dito explicitamente. Entendemos também que a seja ponto de acumulação desse domínio, ao investigarmos se f é contínua no ponto a.

6.3. Definição. *Diz-se que a função f é contínua no ponto $x = a$ de D se existir o limite de $f(x)$ com x tendendo a a e esse limite for igual a $f(a)$; e diz-se que f é contínua em seu domínio, ou contínua, simplesmente, se ela for contínua em todos os pontos desse domínio.*

Propriedades do limite

6.4. Teorema. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$, então $|f(x)|$ tem limite $|L|$. Em particular, se f é contínua em $x = a$, então $|f(x)|$ também é contínua nesse ponto, isto é, $\lim_{x\to a}|f(x)| = |f(a)|$.*

Para a demonstração, observe que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, teremos também $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < \varepsilon$, como queríamos provar.

6.5. Teorema. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$, e se $A < L < B$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow A < f(x) < B$.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 4.6 (p. qq), basta tomar $\varepsilon < \min\{L - A,\ B - L\}$; o δ que for determinado em correspondência a esse ε satisfará a condição do teorema, pelas mesmas razões explicadas na demonstração do Teorema 4.6.

6.6. Corolário. *Se uma função f com domínio D tem limite L com $x \to a$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ é limitada em $V'_\delta(a) \cap D$.*

A demonstração é imediata, considerando, por exemplo, $A = L - 1$ e $B = L + 1$ no teorema anterior.

6.7. Corolário (permanência do sinal). *Se uma função f com domínio D tem limite $L \neq 0$ com $x \to a$, então existe $\delta > 0$ tal que, $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) > L/2$ se $L > 0$ e $f(x) < L/2$ se $L < 0$; ou seja, $|f(x)| > |L|/2$ em ambos os casos.*

Para a demonstração, se $L > 0$ faça $A = L/2$ no teorema; e se $L < 0$ faça $B = L/2$. Este resultado é conhecido como o *teorema da permanência do sinal*, justamente porque, numa vizinhança do ponto a, a função permanece com o mesmo sinal de L. Porém, mais do que permanência do sinal, é importante observar que a função permanece afastada de zero, ou seja, $|f(x)| > |L|/2$ em $V'_\delta(a) \cap D$. Observe a utilização deste resultado na demonstração do item d) do teorema seguinte.

6.8. Teorema. *Se duas funções f e g com o mesmo domínio D têm limites com $x \to a$, então* (Nos limites indicados a seguir, é claro, $x \to a$.)

a) $f(x) + g(x)$ *tem limite e* $\lim[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$;

b) sendo k constante, $kf(x)$ *tem limite e* $\lim[kf(x)] = k \cdot \lim f(x)$;

c) $f(x)g(x)$ *tem limite e* $\lim\,[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$;

d) se, além das hipóteses feitas, $\lim g(x) \neq 0$, *então* $f(x)/g(x)$ *tem limite e* $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas o item d), deixando os demais a cargo do leitor, já que as demonstrações de todos eles são inteiramente análogas às do Teorema 4.8 da p. 80.

Sendo $L \neq 0$ o limite de g, vamos provar que $1/g(x) \to 1/L$ com $x \to a$. O procedimento é o mesmo da demonstração dada para o item d) do Teorema 2.8. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |g(x) - L| < \frac{\varepsilon L^2}{2}. \tag{6.4}$$

Se necessário, diminuímos o δ de maneira a termos também, de acordo com o Corolário 6.7,

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |g(x)| > |L|/2. \tag{6.5}$$

Então, com $x \in V'_\delta(a) \cap D$, teremos

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|g(x) - L|}{|Lg(x)|} < \frac{\varepsilon L^2}{2|Lg(x)|} < \frac{\varepsilon L^2}{2} \cdot \frac{2}{L^2} = \varepsilon,$$

e isso completa a demonstração.

Se $g(x)$ tende a zero e $f(x)$ tem limite diferente de zero, então o quociente $f(x)/g(x)$ pode tender a $\pm\infty$ (limites infinitos serão tratados mais adiante), tudo dependendo do comportamento particular de f e g. Quando $f(x)$ e $g(x)$ tendem ambas a zero, o quociente $f(x)/g(x)$ pode ter limites os mais variados, dependendo novamente do comportamento particular de f e g. Trata-se aqui de um tipo de "forma indeterminada", muito estudada no Cálculo, principalmente em conexão com a chamada "regra de l'Hôpital".

6.9. Corolário. *Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então são também contínuas em $x = a$ as funções $f + g, fg$ e kf, onde k é uma constante qualquer; e é também contínua em $x = a$ a função f/g, desde que $g(a) \neq 0$.*

O teorema seguinte permite definir limite de uma função em termos de limite de seqüências, uma definição equivalente à Definição 6.2.

6.10. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função f com domínio D tenha limite L com $x \to a$ é que, para toda seqüência $x_n \in D - \{a\}, x_n \to a$, se tenha $f(x_n) \to L$. Em particular, f é contínua num ponto a se, e somente se, para toda seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$, se tenha $f(x_n) \to f(a)$.*

Comentário. O teorema afirma a equivalência de duas proposições A e B, que são:

Proposição A: dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Proposição B: $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to L$.

Demonstração. Vamos provar primeiro a parte mais fácil: a condição é necessária, ou seja, $A \Rightarrow B$. Supomos, então, que $f(x) \to L$ com $x \to a$. Seja $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$; devemos provar que $f(x_n) \to L$. Ora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Com esse $\delta > 0$ determinamos N tal que $n > N \Rightarrow x_n \in V'_\delta(a)$; logo, $n > N \Rightarrow f(x_n) \in V_\varepsilon(L)$, e isso prova B.

Provaremos em seguida que a condição é suficiente, ou seja, que $B \Rightarrow A$. Raciocinaremos por absurdo, provando que a negação de A acarreta a negação de B. Vamos escrever essas negações em detalhe, já que elas são freqüentemente um tropeço para o aluno menos experiente.

Negação de A: existe um $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, sempre existe $x \in V'_\delta(a) \cap D$ com $f(x) \notin V_\varepsilon(L)$.

Negação de B: existe uma seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$, tal que $f(x_n)$ não converge para L.

Como estamos negando A, existe um $\varepsilon > 0$ com o qual podemos tomar qualquer δ; tomemos então toda uma seqüência $\delta_n = 1/n$. Em correspondência a cada um desses δ_n, escolhemos e fixamos um $x_n \in V'_{1/n}(a) \cap D$ com $f(x_n) \notin V_\varepsilon(L)$. Dessa maneira produzimos a negação de B, como desejávamos, pois exibimos uma seqüência $x_n \in D, x_n \neq a$, $x_n \to a$, tal que $f(x)$ não converge para L. Isso completa a demonstração do teorema.

O teorema que acabamos de demonstrar permite deduzir o Teorema 6.8 do Teorema 4.8 (p. 80). Por exemplo, supondo que $f(x)$ e $g(x)$ tenham limites

F e G, respectivamente, com $x \to a$, vamos provar que o limite do produto é o produto dos limites. Seja $x_n \in D - \{a\}$ uma seqüência convergindo para a. Então, pela hipótese do Teorema 6.8, $f(x_n) \to F$ e $g(x_n) \to G$; e, pelo Teorema 4.8, $f(x_n)g(x_n) \to FG$, donde o Teorema 6.10 nos leva a concluir que $f(x)g(x) \to FG$, que é o item c) do Teorema 6.8.

6.11. Corolário. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função f com domínio D tenha limite com $x \to a$ é que $f(x_n)$ tenha limite, qualquer que seja a seqüência $x_n \in D - \{a\}, x_n \to a$.*

Demonstração. Tendo em conta o Teorema 6.10, a única coisa que devemos provar é que o limite de $f(x_n)$ é o mesmo, qualquer que seja a seqüência $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$. Em outras palavras, basta provar que se tivermos duas seqüências, $x_n \in D - \{a\}$, $x_n \to a$ e $y_n \in D - \{a\}$, $y_n \to a$, então $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm o mesmo limite. Sejam L' e L'' esses limites, respectivamente. Devemos mostrar que $L' = L''$. Formemos a seqüência (z_n), onde $z_{2k} = x_k$ e $z_{2k-1} = y_k$. É claro que $z_n \to$ a (Exercício 3 da p. 83), logo, $f(z_n)$ converge para um certo número L. Mas $f(x_n)$ e $f(y_n)$ são subseqüências de $f(z_n)$, logo convergem para o mesmo limite L, donde $L' = L'' = L$, como queríamos demonstrar.

6.12. Teorema (critério de convergência de Cauchy). *Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ com domínio D tenha limite com $x \to a$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que*

$$x,\ y \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.6}$$

Demonstração. Para provar que a condição é suficiente, seja $x_n \in D - \{a\}$ uma seqüência qualquer, convergindo para a. Então, em virtude de (6.6), dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n, m > N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Pelo critério de convergência de Cauchy para seqüências (Teorema 4.25, p. 97) segue-se que $f(x_n)$ converge; e pelo Corolário 6.11, concluímos que $f(x)$ tem limite, como queríamos provar.

Deixamos ao leitor a tarefa de provar que a condição é necessária, que é a parte mais fácil.

6.13. Teorema (continuidade da função composta). *Sejam f e g funções com domínios D_f e D_g respectivamente, com $g(D_g) \subset D_f$. Se g é contínua em x_0 e f é contínua em $y_0 = g(x_0)$, então $h(x) = f(g(x))$ é contínua* *em* x_0.

Demonstração. Pela continuidade da função f, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$y \in V_{\delta'}(y_0) \cap D_f \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

Analogamente, pela continuidade da função g, existe $\delta > 0$ em correspondência a δ' tal que

$$x \in V_\delta(x_0) \cap D_g \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \delta'.$$

É claro então que

$$x \in V(\delta) \cap D_g \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon,$$

que completa a demonstração.

Exercícios

1. Prove que a é ponto de acumulação de um conjunto X se e somente se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x \in V'_\varepsilon(a)$.
2. Prove que o limite de uma função, quando existe, é único.
3. Verifique que a função de Dirichlet, $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional, pode ser expressa como
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}[\lim_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}].$$
4. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua para todo x, enquanto $|f|$ seja sempre contínua.
5. Prove que a função $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = -x$ para x irracional só é contínua em $x = 0$, mas $|f(x)|$ é contínua para todo x.
6. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $f(x) = 1/x$ é contínua em todo o seu domínio $x \neq 0$.
7. Prove que $\sqrt{x}$ é uma função contínua em seu domínio $x \geq 0$.
8. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $f(x) = x^2$ é uma função contínua em todo o seu domínio.
9. Prove que a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ não tem limite com $x \to 0$.
10. Prove que a função $f(x) = 1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$ não tem limite com $x \to 0$.
11. Prove o Teorema 6.8 utilizando o Teorema 6.10.

12. Prove os três primeiros itens do Teorema 6.8 diretamente, sem utilizar o Teorema 6.10.
13. Dadas duas funções contínuas f e g, prove que $\max\{f,\ g\}$ e $\min\{f,\ g\}$ também são contínuas.
14. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $\lim_{x\to 6} \frac{5}{x-1} = 1$.
15. Prove, diretamente da Definição 6.2, que $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.
16. Prove que um polinômio é uma função contínua em todo ponto $x = a$, o mesmo sendo verdade do quociente de dois polinômios, nos pontos que não anulam o denominador.
17. **(Critério de confronto ou da função intercalada.)** Sejam f, g e h três funções com o mesmo domínio D, sendo $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Prove que se $f(x)$ e $h(x)$ têm o mesmo limite L com $x \to a$, então $g(x)$ também tem limite L com $x \to a$.
18. Prove que se $f(x)$ é contínua em $x = a$ e $f(x) \geq 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em $x = a$.
19. Sejam f uma função com domínio D, $E \subset D$ e a um ponto de acumulação de E. Prove que se $f(x) \to L$ com $x \to a$ em D, o mesmo é verdade com $x \to a$ em E. Dê um contra-exemplo, mostrando que uma função pode ter limite quando restrita a um sub-domínio E de D e não ter limite em seu domínio D.
20. Seja f uma função contínua em toda a reta, que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula. Prove, em geral, que toda função contínua num domínio D, que seja nula num subconjunto denso de D, é identicamente nula.

Sugestões e soluções

2. Deve-se provar que é impossível haver dois limites distintos L e L'. Veja o Exercício 5 da p. 83.

6. Sendo $a \neq 0$, $|f(x) - f(a)| = \frac{|x-a|}{|ax|}$. Com $|x| > |a|/2$,
$$|f(x) - f(a)| < (2/a^2)|x - a|.$$
Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar δ igual ao menor dos números $a^2\varepsilon/2$ e $|a|/2$ (esta última condição é necessária para garantir $|x| > |a|/2$. Prove isto também.) para termos $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

7. Observe que, sendo $a > 0$,
$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$
Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ para satisfazer a condição (6.3). O caso $a = 0$ é mais simples ainda: $\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$.

8. Se $a \neq 0$, $|x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a| \leq 3|a||x - a|$, esta última desigualdade sendo verdadeira se restringirmos x de forma que $|x| < 2|a|$, o que é suficiente para acomodar $x = a$ no intervalo $(-2|a|, 2|a|)$, como bem mostra um gráfico simples. E, em conseqüência, $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ se $|x - a| < \delta < \varepsilon/3a$. Para garantir a condição $|x| < 2|a|$, notamos que $|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a| < \delta+|a|$; portanto, devemos tomar $\delta < 2|a|$, além de $\delta < \varepsilon/3a$. O caso $a = 0$ é mais fácil: $x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} = \delta$.

9. Utilize o Corolário 6.11, seja construindo uma seqüência $x_n \to 0$ tal que $f(x_n)$ não convirja, seja construindo duas seqüências $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$ tais que $f(x_n)$ e $f(y_n)$ tenham limites distintos. Outro modo seria usar a desigualdade do triângulo para mostrar que a Definição 6.2 é violada com um $\varepsilon < 2$.

10. Proceda como no exercício anterior.

12. O procedimento é análogo ao da demonstração do Teorema 4.8 da p. 80.

13. Veja o Exercício 16 da p. 139.

14. É preciso provar que pode-se fazer $\dfrac{5}{x-1} - 1$ em módulo menor que qualquer $\varepsilon > 0$ prescrito, fazendo $|x - 6| < \delta$. Ora,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| = \frac{|x-6|}{|x-1|}.$$

Como o x vai estar numa vizinhança δ de 6, podemos supor $\delta < 1$, garantindo $|x - 1| > 4$. Faça uma figura para ver que deve ser assim, embora tal fato precise ser provado. E para isto usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|x - 1| = |(x - 6) + 5| \geq 5 - |x - 6| > 5 - \delta > 5 - 1 = 4.$$

Então,

$$\left|\frac{5}{x-1} - 1\right| < \frac{|x-6|}{4}.$$

Isto será menor do que ε se fizermos $|x - 6| < 4\varepsilon$, donde se vê que δ deve ser o menor dos números 4ε e 1.

15. O procedimento é análogo ao do exercício anterior. Esses dois exercícios servem para ilustrar a eficácia do Teorema 6.8, mediante o qual os resultados pedidos nos Exercícios 5, 10 e 11 dispensam todo esse trabalho de provar diretamente da definição de limite.

16. Use repetidamente o Teorema 6.8.

19. Como contra-exemplo considere a função $f(x) = \text{sen}(1/x)$, que não tem limite com $x \to 0$. Tome, por exemplo, $D' = \{1/n\pi,\ n = 1, 2, 3\ldots\}$.

6.3 Limites laterais e funções monótonas

As definições de limite e continuidade são gerais e abrangem também os casos chamados *limites à direita e à esquerda*, bem como *continuidade à direita* e *continuidade à esquerda*. Essas noções surgem quando lidamos com uma função f cujo domínio só tenha pontos à direita ou à esquerda, respectivamente, do ponto $x = a$, onde desejamos considerar o limite. Por exemplo, a função $y = \sqrt{x}$ tem domínio $x \geq 0$; podemos considerar seu limite com $x \to 0$ segundo a definição dada, porém isso resultará numa aproximação de $x = 0$ somente por valores positivos. Daí escrevermos, para enfatizar esse fato, "$x \to 0+$". Igualmente, o limite de $\sqrt{-x}$ com $x \to 0$, será um limite com "$x \to 0-$".

De um modo geral, sendo f uma função cujo domínio D só contenha pontos à direita de um ponto $x = a$, que seja ponto de acumulação de D, então o limite de $f(x)$ com $x \to a$, se existir, será um *limite à direita*. Ao contrário, se D só contiver pontos à esquerda de $x = a$, o limite de $f(x)$ com $x \to a$, se existir, será *um limite à esquerda*. Esses limites são indicados com os símbolos

$$\lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a+) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a-} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a-),$$

respectivamente. Diz-se que f *é contínua à direita* (resp. *à esquerda*) em $x = a$ se f está definida nesse ponto, onde seu limite à direita (resp. à esquerda) é $f(a)$.

Se o domínio de f contiver pontos à direita e à esquerda de $x = a$, devemos restringir esse domínio aos pontos $x > a$ ou $x < a$ para considerarmos seus limites à direita e à esquerda respectivamente. Evidentemente, para que isso seja possível é preciso que $x = a$ seja ponto de acumulação dos domínios restritos. Diremos que $x = a$ é *ponto de acumulação à direita* do domínio D se ele é ponto de acumulação do domínio restrito a valores $x > a$; e *ponto de acumulação à esquerda* se é ponto de acumulação do domínio restrito a valores $x < a$. Por exemplo, a função $f(x) = x/|x|$, que é igual a $+1$ se $x > 0$ e a -1 se $x < 0$ tem limites laterais em $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{|x|} = f(0+) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{x}{|x|} = f(0-) = -1.$$

Ela será *contínua à direita* em $x = 0$ se definirmos $f(0) = 1$; e será *contínua à esquerda* nesse mesmo ponto se pusermos $f(0) = -1$.

O teorema que consideramos a seguir é um resultado fundamental na teoria das funções monótonas, o análogo do Teorema 4.12 (p. 85) para seqüências monótonas. Foi para demonstrar esse teorema que Dedekind sentiu necessidade de uma fundamentação adequada dos números reais.

6.14. Teorema. *Seja f uma função monótona e limitada, definida num intervalo I, do qual $x = a$ é ponto de acumulação à esquerda ou à direita. Então $f(x)$ tem limite com $x \to a-$ ou $x \to a+$, respectivamente.*

Demonstração. Suponhamos, para fixar as idéias, que f seja função não decrescente e $x = a$ seja ponto de acumulação à esquerda. Neste caso, basta supor que f seja limitada superiormente. Seja L o supremo dos valores de $f(x)$, para todo $x \in I$, $x < a$. Provaremos que $f(a-) = L$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $L - \varepsilon < f(a - \delta) \leq L$. Mas f é não decrescente, de sorte que $f(a - \delta) \leq f(x)$ para $a - \delta < x$ e $x \in I$; logo,

$$x \in I,\ a - \delta < x < a \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq L,$$

que prova o resultado desejado.

As demonstrações nos outros casos são feitas por raciocínio análogo e ficam a cargo do leitor.

6.15. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja contínua num ponto a de seu domínio, que seja ponto de acumulação à direita e à esquerda desse domínio, é que os limites laterais da função existam nesse ponto e sejam ambos iguais a $f(a)$.*

A demonstração é fácil e fica para os exercícios.

Limites infinitos e limites no infinito

A definição de limite de uma função se estende aos casos em que, ou a função, ou a variável independente, ou ambas, tendem a valores infinitos. Dizer que uma variável tende a $+\infty$ significa dizer que ela fica maior do que qualquer número $k > 0$. Uma semi-reta do tipo $x > k$ é, por assim dizer, uma "vizinhança de $+\infty$". Analogamente, $x < k$, qualquer que seja k, em particular $k < 0$, é uma "vizinhança de $-\infty$".

As definições seguintes são bastante naturais e dispensam maiores comentários.

6.16. Definições. *Seja f uma função com domínio D e seja a um ponto de acumulação de D. Diz-se que $f(x)$ tende a $+\infty$ com $x \to a$ se, dado qualquer número $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) > k$. De modo análogo, diz-se que $f(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to a$ se, dado qualquer $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) < -k$. Indicam-se esses limites, respectivamente, com os símbolos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Suponhamos agora que D seja ilimitado superiormente. Diz-se que $f(x)$ tem limite L com $x \to +\infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $k > 0$ tal que $x \in D$, $x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, sendo D ilimitado inferiormente, diz-se que $f(x)$ tem limite L com $x \to -\infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $k > 0$ tal que $x \in D$, $x < -k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Esses limites são indicados, respectivamente, com os símbolos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Definem-se também, de maneira óbvia,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vários dos resultados anteriores sobre limites permanecem válidos com as noções de limites aqui introduzidas, às vezes com pequenas e óbvias adaptações; outros ainda podem ser formulados e estabelecidos com procedimentos análogos aos usados anteriormente. Veremos, a seguir, alguns desses resultados.

6.17. Teorema. *a) Toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $[c, +\infty)$, possui limite com $x \to +\infty$; b) toda função monótona e limitada, cujo domínio contenha um intervalo do tipo $(-\infty, c]$, possui limite com $x \to -\infty$.*

Demonstração. Esse teorema é o análogo, para $x \to \pm\infty$, do Teorema 6.14, e a demonstração também é análoga. No caso a) suponhamos que f seja não-crescente, bastando então supor que f seja limitada inferiormente. Seja A o ínfimo de seus valores $f(x)$. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $A \leq f(k) < A + \varepsilon$. Como f é não-crescente, $x > k \Rightarrow f(x) \leq f(k)$, logo $x > k \Rightarrow A \leq f(x) < A + \varepsilon$; isso conclui a demonstração no caso considerado. Deixamos ao leitor a tarefa de terminar a demonstração nos demais casos.

Para o próximo teorema notemos que aproximações laterais, consideradas na seção anterior, ocorrem também com os valores de uma função, e não apenas de sua variável independente. Isso pode ser ilustrado em exemplos simples como estes:

$$\lim_{x \to 0\pm} \sqrt[3]{x} = 0\pm; \quad \lim_{x \to 2\pm} (2 - x)^3 = 0\mp; \quad \lim_{x \to 0\pm} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x} = 0+.$$

De um modo geral, $f(x) \to L+$ com $x \to a$ significa: *dado qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, sendo* D *o domínio de* f,

$$x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow L \leq f(x) < L + \varepsilon.$$

Para a definição de $f(x) \to L-$ basta trocar as últimas desigualdades por $L - \varepsilon < f(x) \leq L$.

6.18. Teorema. *Seja* f *uma função com domínio* $D, f(x) \neq 0$. *Se* $f(x) \to 0+$ *com* $x \to a$, *então* $1/f(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$; *e se* $f(x) \to 0-$ *com* $x \to a$, *então* $1/f(x) \to -\infty$ *com* $x \to a$.

Demonstração. Pela hipótese, dado qualquer $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap D \Rightarrow 0 < f(x) < 1/k$, portanto $1/f(x) > k$. Isso prova a primeira parte. A segunda parte é análoga e fica a cargo do leitor.

6.19. Teorema. *Suponhamos que* $f(x) \to A$ *e* $g(x) \to B$ *com* $x \to +\infty$. *Então, com* $x \to +\infty$, *a)* $f(x) + g(x) \to A + B$; *b) sendo* k *constante,* $kf(x) \to kA$; *c)* $f(x)g(x) \to AB$; *d)* $f(x)/g(x) \to A/B$, *desde que* $B \neq 0$.

Este teorema é análogo ao Teorema 6.8; a demonstração também é análoga e fica a cargo do leitor.

6.20. Teorema. a) *Se* $f(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$, *e se* $g(x) > k$, *então* $f(x) + g(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$. *Além disso, se* $k > 0$, $f(x)g(x) \to +\infty$ *com* $x \to a$.

A demonstração fica a cargo do leitor.

Os teoremas acima são ilustrações de vários resultados envolvendo limites no infinito ou limites infinitos. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar a validade de resultados análogos, seja com a variável independente ou com os valores das funções tendendo a $-\infty$.

Convém observar que muitos resultados válidos para limites finitos não são válidos no caso de limites infinitos. Por exemplo, se duas funções tendem a $+\infty$, sua diferença pode ter limite $+\infty$, $-\infty$ ou qualquer valor finito. Esse é um dos casos de forma indeterminada, do tipo $\infty - \infty$, estudada no Cálculo. Outros tipos de formas indeterminadas são ∞/∞, 0^0, 1^∞ e ∞^0. Não vamos nos deter na consideração dessas formas, por serem elas bastante estudadas no Cálculo.

As descontinuidades de uma função

Do mesmo modo que só consideramos continuidade de uma função em pontos de acumulação de seu domínio, a noção de descontinuidade será igualmente considerada nesses pontos.

Sendo a um ponto de acumulação do domínio D de uma função f, dizemos que f é descontínua em $x = a$ se, ou f não tem limite com $x \to a$, ou esse limite existe e é diferente de $f(a)$, ou f não está definida em $x = a$. Analogamente definimos *descontinuidade à direita* e *descontinuidade à esquerda.*

De acordo com essa definição, estamos admitindo que um ponto possa ser descontinuidade de uma função, mesmo que ele não pertença ao domínio de f. A rigor, não deveria ser assim, só deveriamos admitir descontinuidades em pontos pertencentes ao domínio da função. Mas é natural considerar o que se passa nas proximidades de pontos de acumulação do domínio de uma função, mesmo que tais pontos não pertençam ao domínio. Assim, as funções

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{|x|}{x}, \quad \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \tag{6.7}$$

são todas contínuas em seus domínios (iguais a $R - \{0\}$); e, embora $x = 0$ não pertença a esse domínio, é natural considerar o que acontece com essas funções quando x tende a zero.

Assim, a primeira das funções em (6.7) seria classificada como descontínua em $x = 0$ simplesmente por não estar aí definida, pois tem limite 1 quando $x \to 0$. Atribuindo-lhe o valor 1 em $x = 0$, ela ficará definida e será contínua em toda a reta; por isso mesmo dizemos que esse tipo de descontinuidade é *removível.* (Faça o gráfico desta função.) A segunda tem limites laterais diferentes com $x \to 0$; ela será contínua à direita se pusermos $f(0) = 1$ e contínua à esquerda se definirmos $f(0) = -1$. A terceira função tende a $\pm\infty$ com $x \to 0$ pela direita ou pela esquerda, respectivamente. Finalmente, a quarta função não tem limite com $x \to 0$. (Esboce seu gráfico.) Não há, pois, como remover a descontinuidade, mesmo lateralmente, no caso das duas últimas funções.

As descontinuidades de uma função costumam ser classificadas em três tipos: *removível*, de *primeira espécie* e de *segunda espécie.* A descontinuidade *removível* é aquela que pode ser eliminada por uma conveniente definição da função no ponto considerado, como no primeiro exemplo de (6.7). Como se vê, ela nem é bem uma descontinuidade, pois a função tem limite no ponto considerado, apenas não está adequadamente definida nesse ponto. A descontinuidade é de *primeira espécie* ou do tipo salto quando a função possui, no ponto considerado, limites à direita e à esquerda, mas esses limites são distintos. É esse o caso da segunda função em (6.7). Finalmente, a descontinuidade é de *segunda espécie* quando a função tende a $\pm\infty$ no ponto considerado (terceiro exemplo em (6.7)), ou não tem limite nesse ponto (quarto exemplo em (6.7)).

O teorema seguinte é um resultado interessante sobre as funções monótonas limitadas.

6.21. Teorema. *Os pontos de descontinuidade de uma função monótona f num intervalo I (limitado ou não) só podem ser do tipo salto; e formam um conjunto no máximo enumerável.*

Demonstração. Que as descontinuidades só podem ser do tipo salto é imediato, pois a função possui limites laterais em cada ponto.

Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade da função, a qual supomos ser não-decrescente. Inicialmente supomos também que I seja um intervalo fechado $[a, b]$. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ são pontos de descontinuidade nesse intervalo, então

$$f(a) \leq f(x_1-), \quad f(x_{i+1}-) - f(x_i+) \geq 0, \quad \text{e} \quad f(x_n+) \leq f(b).$$

Assim, os *saltos* de f nos pontos x_i, definidos como sendo[1]

$$s_f(x_i) = f(x_i+) - f(x_i-),$$

são tais que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} s_f(x_i) &= [-f(x_1-) + f(x_1+)] + [-f(x_2-) + f(x_2+)] + \ldots \\ &+ [-f(x_n-) + f(x_n+)] \\ &= -f(x_1-) - \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i+1}-) - f(x_i+)] + f(x_n+) \\ &\leq f(x_n+) - f(x_1-) \leq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Isso prova que para todo inteiro $m > 0$ só pode haver um número finito de pontos de descontinuidade em $[a, b]$ onde $s_f(x_i) > 1/m$; em outras palavras, o conjunto $D_m = \{x \in [a, b] : s_f(x) > 1/m\}$ é finito. Ora, qualquer ponto de descontinuidade da função em $[a, b]$ está num desses conjuntos D_m, cuja união é o conjunto D de todos os pontos de descontinuidade em $[a, b]$; portanto, esse conjunto D é no máximo enumerável, pelo mesmo argumento usado para provar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais (p. 34). Isso completa a demonstração no caso $I = [a, b]$.

Se I for um intervalo aberto em pelo menos uma de suas extremidades e/ou

[1]A notação $[f(x)]$ é também freqüentemente usada para denotar o salto de f no ponto x. Repare que f pode não ser definida nesse ponto x.

não limitado, podemos exprimí-lo como união enumerável de intervalos fechados. Por exemplo,

$$(a, b) = \cup_{j=r}^{\infty}[a + 1/j,\ b - 1/j], \quad (a, +\infty) = \cup_{j=r}^{\infty}[a + 1/j,\ j],$$

onde r é um número inteiro suficientemente grande para que $[a + 1/r,\ b - 1/r]$ e $[a + 1/r,\ r]$ continuem a ser intervalos. Em vista disso e do Teorema 2.1 da p. 34, chegamos à mesma conclusão de que o conjunto D é enumerável.

O caso de uma função não-crescente é análogo e fica por conta do leitor. Nos dois exemplos seguintes exibimos funções não-decrescentes, com infinitos pontos de descontinuidade.

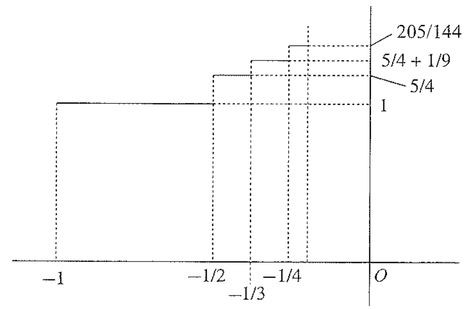

Figura 6.3

6.22. Exemplo. Consideremos a seqüência $r_n = -1/n$ e seja f a função

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2},$$

onde o somatório, como se indica, estende-se a todos os índices n tais que $r_n < x$. Assim,

$$f(x) = 0 \text{ para } x \leq -1; \quad f(x) = 1 \text{ para } -1 < x \leq -1/2;$$

$$f(x) = 1 + 1/4 \text{ para } -1/2 < x \leq -1/3;$$

$$f(x) = 1 + 1/4 + 1/9 \text{ para } -1/3 < x \leq -1/4;$$

e assim por diante. Como se vê, f é contínua em todos os pontos $x \neq r_n$ e contínua à esquerda em todos os pontos $x = r_n$. Seu gráfico tem o aspecto indicado na Fig. 6.3. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar, como exercício, que

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(y) \quad \text{para} \quad y \geq 0. \tag{6.8}$$

O leitor deve notar que funções como essa podem ser construídas com qualquer seqüência crescente r_n que tenha limite zero ou outro qualquer valor, e qualquer série convergente de termos positivos $\sum a_n$, pondo, simplesmente,

$$f(x) = \sum_{r_n < x} a_n.$$

6.23. Exemplo. Seja (r_n) uma seqüência densa na reta, por exemplo, uma seqüência obtida pela enumeração dos números racionais. Vamos construir uma função crescente e limitada, definida em toda a reta, e que tenha saltos em todos esses números r_n. Para isso escrevemos

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} \tag{6.9}$$

Como se vê, estamos somando sobre todos os índices n para os quais r_n é menor do que x. Como a série $\sum 1/n^2$ é convergente, é claro que a soma em (6.9) é convergente. É claro também que a função aqui definida é crescente, pois

$$x < y \Rightarrow f(y) - f(x) = \sum_{x \le r_n < y} \frac{1}{n^2} > 0.$$

Deixamos para os exercícios a tarefa de verificar que

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{6.10}$$

bem como a de provar que a função aqui definida é contínua em todo $x \neq r_n$; é contínua pela esquerda e descontínua pela direita em todo $x = r_n$, onde seu salto é $1/n^2$. O leitor deve deter-se num exame atento dessa função, tentar e verificar a impossibilidade de construir seu gráfico, para bem entender que está diante de um exemplo de função que é interessante e bastante geral. Finalmente, cabe observar que esse é um exemplo extremo de função monótona descontínua, pois as descontinuidades da função já formam um conjunto enumerável e denso na reta, não sendo possível, pelo teorema anterior, ampliá-lo ainda mais.

Exercícios

1. Faça as demonstrações do Teorema 6.14 nos casos omitidos.
2. Demonstre o Teorema 6.15.
3. Defina cada uma das quatro expressões contidas em $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

4. Faça a demonstração do Teorema 6.17 nos casos omitidos.
5. Faça a demonstração da segunda parte do Teorema 6.18.
6. Demonstre os Teoremas 6.19 e 6.20.
7. Suponha que $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to B$ com $x \to a$. Prove que $f(x)g(x) \to +\infty$ se $B > 0$ e $f(x)g(x) \to -\infty$ se $B < 0$.
8. Prove que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x - 9 \to +\infty$ com $x \to +\infty$.
9. Prove que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tende a $+\infty$ com $x \to \pm\infty$ se n for par; e se n for ímpar, $p(x)$ tende a $-\infty$ com $x \to -\infty$ e a $+\infty$ com $x \to +\infty$.
10. Estude os limites de um polinômio
$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \; a_n \neq 0,$$
com $x \to \infty$. Mostre, em particular, no caso n ímpar, que se $a_n > 0$, $\lim p(x) = \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ (havendo correspondência de sinais); e se $a_n < 0$, $\lim p(x) = \mp\infty$ com $x \to \pm\infty$.
11. Prove que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 7x - 8} = 3$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 5} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 7x - 4}{x + 1} = +\infty$.
12. Dados os polinômios $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_mx^m + \ldots + b_1x + b_0$, onde $a_nb_m \neq 0$, estude os limites de $p(x)/q(x)$ com $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Prove que esses limites são iguais a a_n/b_m se $n = m$; são ambos nulos se $n < m$; ambos iguais a $+\infty$ se $n > m, n - m$ é par e $a_nb_m > 0$. Examine estas e todas as demais possibilidades.
13. Seja f uma função crescente e limitada num intervalo (a, b). Estabeleça as desigualdades $f(a+) < f(x) < f(b-)$.
14. **(Critério de convergência de Cauchy)** Prove que uma condição necessária e suficiente para que uma função f tenha limite finito com $x \to +\infty$ é que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, exista $k > 0$ tal que
$$x, \; y > k \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Enuncie e prove propriedade análoga com $x \to -\infty$.
15. Prove a relação (6.8).
16. Prove as relações (6.10)
17. Prove que a função (6.9) é contínua em $x \neq r_n$ para todo n.
18. Prove que a função (6.9) é contínua pela esquerda em $x = r_N$ e descontínua pela direita, com salto $[f(x_N)] = 1/N^2$.

19. No somatório em (6.9) troque $r_n < x$ por $r_n \leq x$ e prove que a nova função obtida é contínua pela direita e descontínua pela esquerda em todo ponto $x = r_n$, onde o salto ainda é $1/n^2$.

20. Seja f uma função monótona num intervalo $[a, b]$, cuja imagem é todo um intervalo $[c, d]$. Prove que f é contínua.

Sugestões e soluções

6. Para provar a parte c) do Teorema 6.19, veja a demonstração da parte c) do Teorema 4.8 da p. 80; para a parte d), veja o item d) do Teorema 6.8.

8. Aplique o Teorema 6.20, notando que $f(x) = x^3(1 - 7/x + 2/x^2 - 9/x^3)$ e que a expressão entre parênteses tende a 1 com $x \to +\infty$, logo, é maior do que qualquer k, $0 < k < 1$ para $|x|$ maior do que um certo N.

9. Pode-se usar o mesmo procedimento do exercício anterior. Outro modo de resolver o problema é o seguinte:

$$\begin{aligned}|p(x)| &= \left|x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right| \\ &\geq |x^n|\left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right|\right) \\ &\geq |x^n|\left[1 - \left(\left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| + \ldots + \left|\frac{a_1}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{x^n}\right|\right)\right].\end{aligned}$$

Tomando x suficientemente grande, podemos fazer $|a_i/x^{n-i}| \leq 1/2n$, $0 \leq i \leq n-1$, de sorte que $|p(x)| \geq |x^n|/2$.

14. Transfira o problema para $\zeta = 0$ com a transformação $\zeta = 1/x$.

15. Para provar a segunda das relações, referente ao limite com $x \to +\infty$, devemos provar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe X tal que

$$x > X \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Da convergência da série $\sum 1/n^2$ segue-se que existe N tal que essa soma, a partir de $n = N+1$, é $< \varepsilon$. Tomemos X tal que $r_1, \ldots, r_N$ sejam todos $< X$. Então, sendo $x > X$, a segunda soma na diferença acima inclui todos os termos correspondentes a $n = 1, \ldots, N$; logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

16. Observe que, sendo $h > 0$,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{x < r_n < x+h} \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad f(x) - f(x-h) = \sum_{x-h \leq r_n < x} \frac{1}{n^2}.$$

17. Com $h > 0$, $f(r_N + h) - f(r_N) = \displaystyle\sum_{r_N \leq r_n < r_N + h} \frac{1}{n^2}$ e $f(r_N) - f(r_N - h) = \displaystyle\sum_{r_N - h \leq r_n < r_N} \frac{1}{n^2}$.

6.4 Funções contínuas em intervalos fechados

O primeiro teorema que vamos demonstrar nesta seção, o assim chamado *Teorema do Valor Intermediário*, tem uma visualização geométrica muito evidente. Em linguagem corrente ele afirma que o gráfico de uma função contínua definida num intervalo, ao passar de um lado a outro do eixo dos x, necessariamente tem de cortar esse eixo. Até o final do século XVIII esse resultado foi aceito como evidente, sem que ninguém pensasse em demonstrá-lo, uma atitude muito de acordo com o espírito da época. Foi Bolzano o primeiro matemático a fazer uma tentativa séria de demonstrar esse teorema, de maneira puramente analítica, num trabalho de 1817, trabalho esse que mais tarde seria visto como um dos marcos principais do início do rigor na Análise das primeiras décadas do século XIX. Vamos apresentar esse teorema em sua versão mais geral, como enunciamos a seguir.

6.24. Teorema do Valor Intermediário. *Seja f uma função contínua num intervalo $I = [a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer número d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Em outras palavras, $f(x)$ assume todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$, com x variando em (a, b).*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração supondo que $f(a) < f(b)$. O caso oposto se reduz a esta considerando a função $g(x) = -f(x)$. Suporemos também que $d = 0$, notando que o caso geral se reduz a este para a função $g(x) = f(x) - d$.

Faremos a demonstração pelo método de bisseção, como na demonstração do Teorema de (Bolzano-Weierstrass, p. 96). Seja l o comprimento de I. Começamos dividindo esse intervalo ao meio, obtendo dois novos intervalos, digamos, $[a, r]$ e $[r, b]$. Se $f(r) = 0$, o teorema estará demonstrado. Se $f(r) > 0$, escolhemos o intervalo $[a, r]$; e se $f(r) < 0$, escolhemos o intervalo $[r, b]$. Em qualquer desses dois casos, teremos um novo intervalo, que denotaremos $I_1 = [a_1, b_1] \subset I$, de comprimento $l/2$, e tal que $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. (O leitor deve usar lápis e papel para acompanhar a demonstração.) Novamente dividimos este intervalo ao meio e repetimos o procedimento anterior; com isso, ou encontramos uma raiz de $f(x) = 0$, ou teremos um novo intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, de comprimento $l/4$, com $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Prosseguindo assim, sucessivamente, ou esse processo termina com o encontro de uma raiz de $f(x) = 0$, ou obtemos uma família (I_n) de intervalos encaixados, $I_n = [a_n, b_n]$, de comprimento $l/2^n$ e tal que $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$. Portanto, pelo teorema dos intervalos encaixados (Teorema 4.22, p. 95), a interseção desses intervalos reduz-se a um único ponto $c \in I$, o qual é o limite tanto de a_n como de b_n. Daqui, da continuidade de f, e do fato de ser $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, segue-se que

$$0 \geq \lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n) \geq 0;$$

donde, $f(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

Guiados pela intuição, podemos ser levados a pensar que toda função que goze da propriedade do valor intermediário seja contínua. No século XIX chegou-se mesmo a acreditar, erroneamente, nesse fato, como nos conta Lebesgue na p. 96 de [7]. Um contra-exemplo é dado pela função $f(x)=\text{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$, e $f(0)$ igual a qualquer valor do intervalo $[-1, +1]$ (faça o gráfico desta função). Assim definida, f satisfaz a propriedade do valor intermediário em qualquer intervalo $[-a, a]$, mas não é contínua em $x = 0$. Neste exemplo a função só é descontínua num único ponto; entretanto, existem funções descontínuas em todos os pontos e que, não obstante, gozam da propriedade do valor intermediário em qualquer intervalo, como nos mostra Lebesgue.

6.25. Exemplo. O Teorema do Valor Intermediário tem importantes aplicações, tanto de natureza teórica como prática. Por exemplo, ele permite provar que todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}x + \ldots + a_1x + a_0$, de grau ímpar, tem pelo menos uma raiz real. Para isso lembramos o Exercício 8 atrás, segundo o qual $p(x)$ muda de sinal com x passando de uma certa vizinhança de $-\infty$ a uma vizinhança de $+\infty$. Mais precisamente, existem vizinhanças V_- de $-\infty$ e V_+ de $+\infty$, tais que $p(x)$ é negativo em V_- e positivo em V_+. Em conseqüência, existem números $a \in V_-$, $b \in V_+$, $a < b$, tais que $p(a) < 0 < p(b)$. Daqui e do teorema do valor intermediário segue-se que existe c, $a < c < b$, tal que $p(c) = 0$. (É claro que pode haver mais de um número c nessas condições; o que podemos garantir, em geral, é a existência de pelo menos um.) Em contrapartida, um polinômio de grau par, como $p(x) = x^2+1$, pode nunca se anular.

O teorema seguinte é mais uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário.

6.26. Lema. *Toda função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$ é limitada nesse intervalo.*

Demonstração. Seja f a referida função. Raciocinando por absurdo, suponhamos que ela não seja limitada. Dividimos o intervalo I ao meio, obtendo dois novos intervalos fechados, digamos, $[a, r]$ e $[r, b]$. Em um destes f não será limitada. Seja $I_1 = [a_1, b_1] \subset I$ esse novo intervalo. Ele tem comprimento $l/2$, e nele f não é limitada. Repetimos o procedimento com $[a_1, b_1]$, obtendo um novo intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, de comprimento $l/4$, e no qual f não é limitada. Prosseguindo assim, sucessivamente, obtemos uma família de intervalos encaixados $I_n = [a_n, b_n]$, de comprimento $l/2^n$, onde f não é limitada. Portanto, pelo teorema dos intervalos encaixados Teorema 4.22, p. 95), a interseção desses intervalos reduz-se a um único ponto $c \in I$.

Finalmente, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in V_\delta(c) \Rightarrow f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1.$$

Como $|f(c) \pm 1| \leq |f(c)| + 1$, isso significa que $|f(x)| < |f(c)| + 1$ em $V_\delta(c)$; portanto, f é limitada em $V_\delta(c)$. Mas, sendo n suficientemente grande, $V_\delta(c) \supset I_n$, o que nos leva a um absurdo, pois f não é limitada em I_n. Assim, temos de afastar a hipótese inicial e concluir que f é limitada em I.

6.27. Teorema. *Toda função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$ assume valores máximo e mínimo nesse intervalo.*

Demonstração. Seja f a referida função e seja M seu supremo em I. Raciocinando por absurdo, suponhamos que $|f(x)| < M$ em I. Então, $1/(M - f(x))$ é uma função positiva e contínua em I; e, pelo lema anterior, ela tem supremo M' em I, isto é,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq M', \quad \text{donde} \quad f(x) \leq M - \frac{1}{M'}.$$

Isto contradiz o fato de que M é o supremo de f e nos leva a concluir que existe algum $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = M$, provando que f efetivamente assume valor máximo em I.

Para provar que f assume valor mínimo, considere a função $g(x) = -f(x)$, que também é contínua em I; portanto, pelo que acabamos de demonstrar, existe um ponto $x_0' \in I$ tal que

$$x \in I \Rightarrow g(x) \leq g(x_0'), \quad \text{donde} \quad x \in I \Rightarrow f(x) \geq f(x_0'),$$

o que completa a demonstração do teorema.

Observações. As hipóteses de que o intervalo I seja limitado e fechado são essenciais. Veja estes contra-exemplos: $f(x) = 1/x$ com domínio o intervalo $(0, 1]$ não é limitada porque o domínio não é fechado; a função $f(x) = x^2$ não é limitada em $[1, \infty)$ porque este domínio não é limitado.

Por outro lado, uma função pode assumir valores máximo e mínimo mesmo que seu domínio não seja limitado ou fechado.

6.28. Teorema. *Seja f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$. Então $f(I)$ também é um intervalo limitado e fechado $[m, M]$ (que pode se reduzir a um ponto), onde m e M são os valores mínimo e máximo, respectivamente, da função f.*

Demonstração. Como f é contínua, ela assume valores mínimo e máximo em I, isto é, existem pontos c e d em I, tais que $f(c) = m$ e $f(d) = M$. (Não sabemos se $c < d$ ou $d < c$.) Pelo Teorema do Valor Intermediário, $f(x)$ assume todos os valores entre m e M, com x variando no intervalo de extremos c e d. Portanto, a imagem desse intervalo de extremos c e d já é o intervalo $[m, M]$; logo, $f(I) = [m, M]$, pois $m \le f(x) \le M$ qualquer que seja $x \in I$.

6.29. Teorema. *A imagem de qualquer intervalo por uma função contínua f é um intervalo (que pode se reduzir a um ponto).*

Demonstração. (O teorema se refere a um intervalo qualquer, não apenas limitado e fechado, como no teorema anterior.) Observe que para provar que um conjunto J é um intervalo, como (a, b), $[a, b)$, $(-\infty, b]$, ou qualquer outro tipo de intervalo, basta provar que J contém qualquer intervalo $[a, b]$, com $A < a < b < B$, onde $A = \inf J$ e $B = \sup J$ (não estando excluídas as possibilidades de ser $A = -\infty$ e/ou $B = +\infty$). Provado isso, é fácil ver que $J \supset (A, B)$, pois $(A, B) = \cup[a_n, b_n]$, onde (a_n) e (b_n) são seqüências decrescente e crescente, respectivamente, $a_n \to A$ e $b_n \to B$. Isso prova que J é um dos quatro intervalos de extremos A e B, isto é, $[A, B]$, (A, B), $[A, B)$ ou $(A, B]$.

Seja I um intervalo qualquer, contido no domínio da função f; e seja $J = f(I)$. Supomos que J não se reduza a um único ponto, quando nada temos a demonstrar. Então, dados quaisquer dois pontos distintos y_1 e y_2 em J, eles serão imagens de pontos em I, digamos, x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$: $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Para fixar as idéias, suponhamos $x_1 < x_2$. (O leitor deve verificar que a hipótese $x_2 < x_1$ leva ao mesmo raciocínio). Pelo teorema do valor intermediário, todos os valores entre y_1 e y_2 são assumidos pela função f em valores compreendidos entre x_1 e x_2, de sorte que $J \supset f([x_1, x_2]) \supset [y_1, y_2]$. Finalmente, dado qualquer intervalo fechado $[a, b]$ com $A < a < b < B$, tomamos, no raciocínio anterior, y_1, $y_2 \in J$, $A \le y_1 < a$ e $b < y_2 \le B$, e teremos $J \supset f([x_1, x_2]) \supset [y_1, y_2] \supset [a, b]$, como queríamos provar.

Como exemplos da situação descrita no teorema, $y = senx$ leva $(0, 2\pi)$ em $[-1, 1]$ e $[0, 3\pi/2)$ em $(-1, 1]$ $y = \operatorname{tg}(\pi x - \pi/2)$ leva $(0, 1)$ em $(-\infty, \infty)$; $y = 1/(x^2 + 1)$ leva $[0, \infty)$ em $(0, 1]$.

Veremos, a seguir, outro resultado importante, demonstrado como conseqüência do Teorema do Valor Intermediário.

6.30. Teorema. *Toda função f, contínua e injetiva num intervalo I, é crescente ou decrescente. Sua inversa g, definida em $J = f(I)$, também é contínua.*

Demonstração. Se f não fosse crescente ou decrescente, existiriam números x_1, x_2 e x_3 em I tais que $x_1 < x_2 < x_3$ e $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, ou $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Na hipótese de ser $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, se $f(x_3) > f(x_1)$ (faça um gráfico para acompanhar o raciocínio), pelo Teorema do Valor Intermediário, deveria existir um número x' entre x_1 e x_2 tal que $f(x') = f(x_3)$, contradizendo a injetividade de f; e se fosse $f(x_3) < f(x_1)$, pelo mesmo teorema, deveria existir x' entre x_2 e x_3 tal que $f(x_1) = f(x')$, novamente contradizendo a injetividade de f. O raciocínio, no caso $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$, é análogo. Concluímos, então, que f é estritamente crescente ou decrescente, como queríamos provar.

Quanto à função inversa, já sabemos que ela tem o mesmo caráter de monotonicidade que a função f (Exercício 5 da p. 138). Suponhamos, para fixar as idéias, que f seja estritamente crescente, de forma que g também é. Vamos provar que g é contínua em qualquer valor $b \in J = f(I)$. Seja $a = g(b)$, de sorte que $f(a) = b$. Se a for interior ao intervalo I (faça um gráfico para acompanhar o raciocínio), dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' \le \varepsilon$, tal que $V_{\varepsilon'}(a) \subset I$. Ora, $f(V_{\varepsilon'}(a)) = (b - \delta_1, b + \delta_2) \subset J$. Seja agora δ o menor dentre δ_1 e δ_2 , de sorte que $g(V_\delta(b)) \subset V_{\varepsilon'}(a) \subset V_\varepsilon(a)$, e isso prova a continuidade da função g no ponto b. Um raciocínio análogo se aplica no caso em que b é um dos extremos do intervalo J. A demonstração no caso de função estritamente decrescente g é também análoga e fica a cargo do leitor.

O teorema que acabamos de demonstrar é muito interessante, pois nos diz que as funções crescentes e as decrescentes são as únicas funções contínuas definidas em intervalos que são invertíveis. Isso nos leva, naturalmente, a perguntar: será que são essas as únicas funções (definidas em intervalos) invertíveis? A resposta é negativa, como vemos pelo seguinte contra-exemplo: seja f assim definida no intervalo $I = [0, 1]$: $f(x) = x$ se x for racional e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e verifique que ela é invertível, mas não é monótona em qualquer subintervalo de I; em conseqüência, não é contínua em seu domínio, apenas no ponto $x = 1/2$ (Exercício 17 adiante).

O método de bisseção utilizado na demonstração dos Teoremas 6.24 e 6.26 é muito útil para implementar esquemas numéricos de computação. Com uma simples calculadora científica é possível calcular raízes polinomiais com boas aproximações. (Veja o Exercício 2 adiante.)

Exercícios

1. Faça a demonstração do Teorema 6.24 no caso $f(a) > f(b)$.

2. Prove que a equação $x^4 + 10x^3 - 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais. Use uma calculadora científica para determinar uma dessas raízes com aproximação de duas casas decimais.

3. Prove que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais, contando as multiplicidades.

4. Prove que se n é par, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ assume um valor mínimo m. Em conseqüência, prove que $p(x) = a$ tem pelo menos duas soluções distintas se $a > m$ e nenhuma se $a < m$.

5. Prove que se um polinômio de grau n tiver r raízes reais, contando as multiplicidades, então $n - r$ é par.

6. Prove que todo número $a > 0$ possui raízes quadradas, uma positiva e outra negativa.

7. Prove que todo número $a > 0$ possui uma raiz n-ésima positiva; e se n for par, possuirá também uma raiz n-ésima negativa.

8. Seja f uma função contínua num intervalo, onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.

9. Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe um número c entre a e b, tal que $f(c) = g(c)$. Faça um gráfico para entender bem o que se passa.

10. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com valores nesse mesmo intervalo. Prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Interprete este resultado geometricamente.

11. Nas mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. Interprete este resultado geometricamente.

12. Seja f uma função contínua no intervalo $[0, 1]$, com $f(0) = f(1)$. Prove que existe um número $c \in [0, 1/2]$ tal que $f(c) = f(c + 1/2)$. Este exercício tem uma interpretação física muito interessante: se f representa a temperatura num determinado instante, ao longo de qualquer curva fechada simples sobre a superfície terrestre — em particular o equador terrestre —, e x representa a distância ao longo dessa curva a partir de um certo ponto, o resultado anunciado significa que existem dois pontos, c e $c + 1/2$, onde a temperatura tem o mesmo valor.

13. Complete a demonstração do Teorema 6.30, provando que g é contínua em b, na hipótese de que b seja uma das extremidades do intervalo J. Faça também a demonstração completa do teorema no caso em que f (e, conseqüentemente, também g) é uma função decrescente.

14. Sejam f e g funções crescentes num intervalo I, onde $f(x) \leq g(x)$. Prove que $f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y)$ para todo $y \in f(I) \cap g(I)$.

15. Prove que a imagem de um intervalo aberto por uma função contínua injetiva é um intervalo aberto. Dê exemplos em que o intervalo-domínio é limitado, mas sua imagem é ilimitada.

16. Dê exemplo de uma função cujo domínio não seja nem fechado nem limitado, mas que tenha valores máximo e mínimo.

17. Prove que $f(x) = x$ se x for racional, e $f(x) = 1 - x$ se x for irracional, é contínua em $x = 1/2$ e somente neste ponto.

18. Considere a função f assim definida: $f(x) = -x$ se x for racional e $f(x) = 1/x$ se x for irracional. Faça o gráfico dessa função e mostre que ela é uma bijeção descontínua em todos os pontos.

Sugestões

2. Lembre-se de que quando um polinômio com coeficientes reais tiver uma raiz complexa, ele terá também a complexa conjugada como raiz. Verifique que há uma raiz entre zero e 1 e determine esta raiz pelo método de bisseção.

6. Suponhamos $a \neq 1$, já que o caso $a = 1$ é trivial. Se $a > 1$, $f(x) = x^2$ é tal que $f(1) < f(a)$; logo, pelo teorema do valor intermediário, existe um número entre 1 e a, designado por $\sqrt{a}$, tal que $f(\sqrt{a}) = a$. Se $a < 1$, $f(1) > a > f(a)$, e novamente existe um número $\sqrt{a}$ entre a e 1 tal que $f(\sqrt{a}) = a$. E o caso de raiz negativa?

10. Considere a função $g(x) = f(x) - x$, se já não for $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$.

11. Use o Exercício 9 com $g(x) = 1 - x$.

12. Considere a função $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$ no intervalo $[0, 1/2]$.