# Capítulo 7

# O cálculo diferencial

No presente capítulo fazemos uma apresentação rigorosa dos conceitos e teoremas fundamentais do Cálculo Diferencial, uma tarefa que não costuma ser feita nas disciplinas introdutórias de Cálculo; isso por duas razões: por um lado o professor não dispõe de uma teoria dos números reais, sobretudo a propriedade do supremo, ou algo equivalente, como a propriedade dos intervalos encaixados. E sem isso fica impossível demonstrar rigorosamente os teoremas da Seção 6.4 que são necessários às demonstrações que faremos logo adiante. Em segundo lugar, o objetivo primordial de um curso de Cálculo é desenvolver logo os métodos e técnicas da disciplina, não só para prover os pre-requisitos de outras disciplinas, mas também para familiarizar o aluno com funções mais sofisticadas e várias de suas propriedades, o que muito facilita o estudo da Análise.

Portanto, no presente capítulo cuidaremos de estabelecer, de forma rigorosa, os resultados básicos do Cálculo Diferencial, e não os métodos e técnicas que são objeto de um curso preliminar de Cálculo. Por isso mesmo é muito conveniente que o leitor, ao estudar os tópicos deste capítulo, faça, ao mesmo tempo, um re-estudo dos referidos métodos e técnicas da derivada. E para isso ele deve se valer de um texto de Cálculo, em particular nossos livros [1] e [2].

## 7.1 A derivada e a diferencial

Diz-se que uma função $f$, definida num intervalo aberto $I$, é derivável em $x_0 \in I$ se existe e é finito o limite da *razão incremental*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{7.1}$$





com $x \to x_0$. Esse limite é, por definição, a *derivada* da função $f$ no ponto $x_0$. Para indicar esse limite usam-se as notações

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0) \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx}(x_0),$$

esta última sendo o quociente de diferenciais, como explicaremos logo adiante. Em Mecânica, onde freqüentemente se consideram funções do tempo $t$, como $s(t)$, $x(t)$, etc., é comum a notação da derivada com a letra encimada por um ponto, como

$$\dot{s}(t), \quad \dot{s}, \quad \dot{x}(t), \quad \dot{x}, \quad \text{etc.}$$

Pondo $x = x_0 + h$, podemos escrever a derivada das seguintes maneiras:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Essa é a derivada no sentido ordinário, o ponto $x_0$ sendo *interior* ao domínio da função. As noções de *derivadas laterais, à direita* e *à esquerda*, são introduzidas de maneira análoga:

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Essas definições se aplicam mesmo que $x_0$ seja extremo esquerdo ou direito, respectivamente, de um intervalo onde $f$ seja definida. Como exemplo, considere a função $f(x) = (\sqrt{x})^3$, que está definida somente para $x \geq 0$; portanto, não é derivável no sentido ordinário em $x = 0$. No entanto, existe e é zero sua derivada à direita nesse ponto, pois $f(h) - f(0) = h\sqrt{h}$.

A derivada de uma função $f$ é, por sua vez, uma função do ponto onde é calculada. Podemos, pois, considerar sua derivada, que é chamada a *derivada segunda* de $f$ e indicada com as notações $f''$, $D^2 f$, $d^2 f/dx^2$, $\ddot{s}(t)$, $\ddot{x}(t)$. De um modo geral, podemos considerar a *derivada de ordem* $n$ ou *derivada* $n$*-ésima*, definida recursivamente como a derivada da derivada de ordem $n-1$ e indicada com as notações $f^{(n)}$, $D^{(n)}f$, $d^n f/dx^n$. Uma função com derivadas contínuas até a ordem $n$ é chamada *função de classe* $C^n$.

O leitor deve notar que muitos dos resultados envolvendo derivadas ordinárias permanecem válidos para as derivadas laterais, com pequenas e óbvias modificações. É fácil ver também que *uma função $f$ é derivável em $x_0$, no sentido ordinário, se e somente se suas derivadas laterais nesse ponto existem e são iguais.* (Exercício 1 adiante.)

No pressuposto de que a função $f$ seja derivável, a diferença

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = \eta$$

tende a zero com $x \to x_0$, de sorte que

$$f(x) = f(x_0) + [f'(x_0) + \eta](x - x_0)$$

tende a $f(x_0)$ com $x \to x_0$. Isso prova o teorema que enunciamos a seguir.

**7.1. Teorema.** *Toda função derivável num ponto $x_0$ é contínua nesse ponto.*

## Reta tangente

Voltemos à razão incremental (7.1), que representa o declive da reta secante $PQ$, onde $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$, como ilustra a Fig. 7.1. Quando $x \to x_0$, o ponto $Q$ se aproxima do ponto $P$ e $f'(x_0)$ é o valor limite do declive da reta secante. Isto sugere a definição de *reta tangente* à curva $y = f(x)$ no ponto $P$ como aquela que passa por esse ponto e tem declive $f'(x_0)$. Sua equação, em coordenadas $(x, Y)$, é então dada por

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{ou} \quad Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{7.2}$$

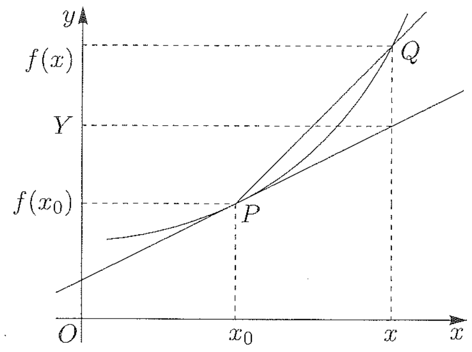


Figura 7.1

É interessante examinar a natureza do contato dessa reta com a curva $y = f(x)$. Para isso, observamos que a diferença de ordenadas da curva e da reta, correspondentes à mesma abscissa $x$, isto é, $f(x) - Y$, tende a zero com $x \to x_0$. Mas não é só isso; também tende a zero o quociente dessa diferença por $x - x_0$, isto é,

$$\frac{f(x) - Y}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \eta$$

que tende a zero com $x \to x_0$. Vemos assim que a diferença de ordenadas $f(x) - Y$, ou *distância* entre a curva e a reta tangente ao longo de uma paralela



ao eixo $Oy$ (Fig. 7.2), tende a zero "mais depressa" que $x - x_0$. Em vista disso dizemos que o contato da curva com a reta tangente no ponto $P$ considerado é de *ordem superior à primeira*. (Veja a noção de "ordem de grandeza" na p. 39 de [2].)

Outro modo de introduzir a reta tangente consiste em definir essa reta como sendo, dentre as retas do feixe pelo ponto $P$, aquela que tem com a curva um contato de ordem superior à primeira. Sendo a função derivável, vamos mostrar que essa condição de fato determina a reta tangente univocamente como sendo aquela de equação (7.2). De fato, o referido feixe de retas é dado por

$$Y = f(x_0) + m(x - x_0), \tag{7.3}$$

onde $m$ é um parâmetro variável (Fig. 7.3). A condição de que essa reta tenha com a curva contato de ordem superior à primeira,

$$\frac{f(x) - Y}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \to 0 \tag{7.4}$$

implica $m = f'(x_0)$.

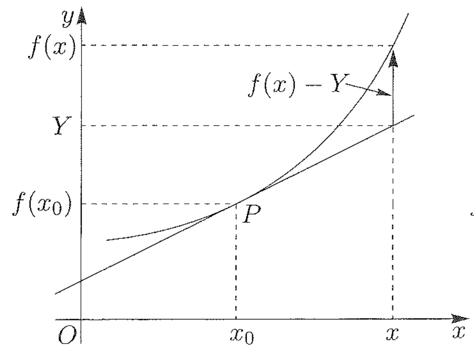


Figura 7.2

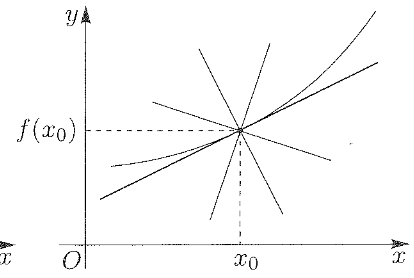


Figura 7.3

Diz-se que a função $f$ é *diferenciável* em $x = x_0$ se existe uma reta do feixe (7.3) que tenha com a curva $y = f(x)$ contato de ordem superior à primeira no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. É imediato, por (7.4), que isso implica $f$ derivável em $x = x_0$. Portanto, derivabilidade e diferenciabilidade são aqui conceitos equivalentes (o que, todavia, não é verdade em várias dimensões).

## A diferencial

A *diferencial* da função $f$ no ponto $x_0$ é definida como sendo o produto $dy = f'(x_0)\Delta x$, onde $\Delta x = x - x_0$. De acordo com esta definição, a diferencial da função identidade, $x \mapsto x$, é $\Delta x$, isto é, $dx = \Delta x$, de sorte que, em geral, $dy = f'(x_0)dx$. Daqui segue também que a derivada é o quociente das diferenciais: $f'(x_0) = dy/dx$. Mais precisamente, $f'(x_0) = (df/dx)(x_0)$, onde $df = dy = f'(x_0)dx$.

Pondo $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, é fácil ver que $\Delta y - dy = f(x) - Y$, de sorte que essa diferença $\Delta y - dy$ *é de ordem superior à primeira* com $x \to x_0$ (Fig. 7.4), significando isso que $\Delta y$ aproxima $dy$, tanto melhor quanto mais próximo estiver $x$ de $x_0$.

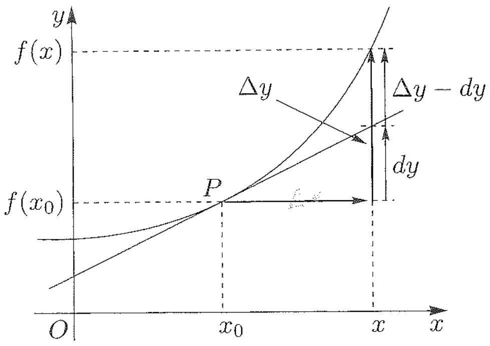


Figura 7.4

Prova-se, sem dificuldade, que se $f$ e $g$ são deriváveis num ponto $x$, o mesmo é verdade de $f+g$ e $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$. É igualmente imediato verificar que $(\alpha f)' = \alpha f'$, onde $\alpha$ é uma constante. As derivadas do produto e do quociente exigem mais trabalho e são consideradas a seguir.

## Regras operacionais

**7.2. Teorema.** *Se $f$ e $g$ são deriváveis num ponto $x$, então o mesmo é verdade de $fg$ e $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Se, ainda, $g(x) \neq 0$, então*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

*Demonstração.* No caso do produto, observamos que a razão incremental se escreve:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h}$$



$$= f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x).$$

Agora é só fazer $h \to 0$ para obtermos o resultado desejado.

Quanto ao quociente, consideremos primeiro o caso em que $f = 1$, ou seja, $1/g$. Temos de considerar a razão incremental

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\;\frac{1}{g(x+h)g(x)},$$

cujo limite, com $h \to 0$, produz o resultado desejado. O caso de um quociente geral $f/g$ pode ser tratado como produto: $f/g = f \cdot 1/g$.

**7.3. Teorema (regra da cadeia).** *Consideremos uma função composta $fog$ (p. 137), definida num intervalo $I$, de sorte que $g(I) \subset D_f$. Suponhamos que $g$ seja derivável num ponto $x \in I$ e $f$ derivável em $y = g(x)$. Então a função composta $f(g(x))$ é derivável no ponto $x$ e $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.*

*Demonstração.* Como $f$ é derivável no ponto $y$,

$$\frac{f(y+k)-f(y)}{k} = f'(y) + \eta(k),$$

onde $\eta(k) \to 0$ com $k \to 0$. Pondo $\eta(0) = 0$, podemos escrever essa equação na forma

$$f(y+k) - f(y) = k[f'(y) + \eta(k)],$$

que é agora verdadeira mesmo para $k = 0$. Seja $k = g(x+h) - g(x)$. Então,

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(y+k)-f(y)}{h} = \frac{[f'(y)+\eta(k)]k}{h}$$

$$= [f'(g(x)) + \eta(k)]\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Da continuidade de $g$ no ponto $x$ segue-se que $k \to 0$ com $h \to 0$. Assim, basta fazer $h$ tender a zero para obtermos o resultado desejado.

Dos resultados até aqui obtidos seguem facilmente as regras de derivação que o leitor já conhece de seu primeiro curso de Cálculo: a derivada de uma constante é zero, $(x^n)' = nx^{n-1}$ para $n$ inteiro qualquer, e também as conhecidas regras de derivação de polinômios e funções racionais.

## Derivada da função inversa

Vimos, no Teorema 6.30 (p. 165), que as únicas funções contínuas em intervalos que também são invertíveis são as funções crescentes e as decrescentes. Estamos interessados em funções deriváveis e invertíveis; portanto, contínuas, crescentes ou decrescentes. O teorema seguinte é um resultado de grande importância prática no cálculo de derivadas de certas funções em termos das derivadas de suas inversas, como o leitor já deve saber de seu curso de Cálculo.

**7.4. Teorema (derivada da função inversa).** *Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto $I = (a, b)$, com $f'(x)$ sempre positiva ou sempre negativa nesse intervalo. Então sua inversa $x = g(y)$ é derivável no intervalo $J = f(I)$ e*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

*Demonstração.* Sejam $y_0 \in J$, $y \in J$, $x_0 = g(y_0)$ e $x = g(y)$. Então

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]^{-1}$$

Observe que $J$ é um intervalo aberto (Exercício 15 da p. 167), de forma que podemos fazer $y$ variar em toda uma vizinhança de $y_0$, com o que $x$ estará variando em toda uma vizinhança de $x_0$; e fazendo $y \to y_0$, $x$ tenderá a $x_0$ (pois $g$ é contínua, como vimos no Teorema 6.30), donde o resultado desejado.

## Exercícios

1. Prove que uma função $f$ é derivável no sentido ordinário num ponto $x = x_0$ se e somente se existem e são iguais suas derivadas laterais nesse ponto.

2. Estabeleça, diretamente da definição de derivada, as seguintes regras de derivação: $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(1/x)' = -1/x^2$; $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$.

3. Use o método de indução para provar que a derivada $n$-ésima de $1/x$ é $(-1)^n/x^{n+1}$.

4. Nos cursos de Cálculo aprende-se que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. Prove, por indução, que $(\operatorname{sen} x)^{(2n)} = (-1)^n \operatorname{sen} x$ e $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$.

5. Prove que $f$ é derivável em $x = a$ se e somente se qualquer que seja a seqüência $(x_n)$, $x_n \to a \Rightarrow \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$ converge.

6. Prove que se $f$ é uma função monótona num intervalo, suas derivadas laterais num ponto $a$, quando existem, são não-negativas se $f$ for não-decrescente e não positivas se $f$ for não-crescente.

7. Mostre que a função $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ não é derivável em $x = 0$. Faça um gráfico e interprete esse resultado geometricamente. (Veja o Exemplo 4 da p. 126 de [1].)



8. Dê exemplo de uma função $f$ que não tenha derivada num ponto $x = a$, e de uma seqüência $x_n \to a$ tal que $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$ converge.

9. Mostre que a função $f(x) = x^2\operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é derivável em todos os pontos, inclusive em $x = 0$, mas $f'(x)$ é descontínua nesse ponto. Faça um gráfico e interprete esse resultado geometricamente. (Veja o Exemplo 5 da p. 127 de [1].) Observe, em particular, que em qualquer vizinhança da origem, a tangente à curva nesse ponto atravessa a curva infinitas vezes. Este exemplo mostra ainda que a derivada num ponto nem sempre é o limite da derivada calculada fora desse ponto.

10. Sejam $f$ uma função derivável em $x = a$, $x_n$ e $y_n$ seqüências que convergem para $a$, $x_n < a < y_n$. Prove que $f'(a) = \lim \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$. Dê um contra-exemplo mostrando que esse limite pode existir sem que $f$ seja derivável em $x = a$.

11. Dê exemplo de uma função derivável num ponto $x = a$ e de duas seqüências $x_n$ e $y_n$, com $a < x_n < y_n$, de forma que não exista o limite do quociente
$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}.$$

12. Supondo que $f$ e $g$ sejam funções de classe $C^n$ num mesmo domínio, prove que $fg$ também é de classe $C^n$ e que vale a seguinte *Fórmula de Leibniz*:
$$(fg)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)} g^{(r)}.$$

## Sugestões

8. Tome a função do exercício anterior e $a = 0$.

10. Observe que
$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\alpha_n + \frac{f(a) - f(y_n)}{a - y_n}\beta_n,$$
onde
$$\alpha_n = \frac{x_n - a}{x_n - y_n} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{a - y_n}{x_n - y_n} > 0,$$
donde $\alpha_n + \beta_n = 1$. Além disso,
$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a) + \varepsilon_n \quad \text{e} \quad \frac{f(a) - f(y_n)}{a - y_n} = f'(a) + \varepsilon'_n,$$
onde $\varepsilon_n \to 0$ e $\varepsilon'_n \to 0$.

11. $f(x) = x^2 \cos(\pi/x)$, $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(n+1)$.

## 7.2 Máximos e mínimos locais

Seja $f$ uma função com domínio $D$. Diz-se que um ponto $a \in D$ é de *máximo local* de $f$ se existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \leq f(a)$; $a$ é *ponto de mínimo local* se existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \geq f(a)$. Máximo e mínimo locais são ditos *estritos* quando ocorrem as desigualdades estritas $f(x) < f(a)$ e $f(x) > f(a)$, respectivamente.

Como se vê, máximo e mínimo locais são máximo e mínimo da função restrita a uma vizinhança conveniente de um ponto. Quando usamos esse qualificativo "local", usamos também o qualificativo "absoluto" para designar o máximo e o mínimo da função em todo o seu domínio $D$, daí designarmos *máximo* e *mínimo absolutos* ao máximo e mínimo da função em $D$. É claro que quando fazemos considerações de natureza local, envolvendo máximo ou mínimo, como no teorema seguinte, o caráter local desses conceitos é suficiente.

**7.5. Teorema.** *Se $f$ é uma função derivável num ponto $x = c$, onde ela assume valor máximo ou mínimo, então $f'(c) = 0$.*

*Demonstração.* No caso de máximo, notamos que, para $|h|$ suficientemente pequeno, $f(c+h) - f(c) \leq 0$, de sorte que a razão incremental

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

é $\leq 0$ se $h > 0$ e $\geq 0$ se $h < 0$. Em conseqüência, o limite dessa razão com $h \to 0$ só pode ser zero, donde $f'(c) = 0$. O raciocínio é análogo no caso em que $c$ é ponto de mínimo.

A recíproca desse teorema não é verdadeira: pode muito bem acontecer que $f'(a)$ seja zero sem que $x = c$ seja ponto de máximo ou de mínimo; é esse o caso da função $y = x^3$, a qual tem derivada nula em $x = 0$, sem que esse ponto seja de máximo ou de mínimo. Outro ponto que se deve notar, no caso em que a função tenha por domínio um intervalo, é que a derivada não é necessariamente zero em pontos de máximo ou de mínimo que sejam extremos do intervalo. Assim, $f(x) = x \cos x$, no intervalo $[0, \pi/4]$, tem mínimo em $x = 0$ e máximo em $x = \pi/4$, mas sua derivada não se anula nesses pontos, sendo positiva em todo o intervalo. (Faça o gráfico dessa função.)

Pelo teorema anterior, vemos que os pontos de máximo e de mínimo de uma função definida num intervalo fechado e derivável nos pontos internos, devem ser



procurados entre os pontos onde sua derivada se anula — os chamados *pontos críticos* da função — e nos extremos do intervalo.

### Teorema do Valor Médio

O teorema que trataremos a seguir é uma conseqüência simples do anterior e tem evidente conteúdo geométrico. Ele nos servirá como lema para a demonstração do teorema seguinte, que, pelas suas várias conseqüências, é o resultado central do Cálculo Diferencial.

**7.6. Teorema (de Rolle).** *Se $f$ é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, derivável nos pontos internos, com $f(a) = f(b)$, então sua derivada se anula em algum ponto interno, isto é, $f'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.*

*Demonstração.* Pode ser que $f$ seja constante, em cujo caso $f'$ se anula em todos os pontos internos. Se não for constante, terá que assumir valores maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo contínua num intervalo fechado, $f$ assume um valor máximo e um valor mínimo. Então, se $f$ assumir valores maiores do que $f(a)$, ela assumirá seu máximo num ponto interno $c$; e se assumir valores menores do que $f(a)$, assumirá seu mínimo num ponto interno $c$. Em qualquer caso, $f'(c) = 0$ pelo teorema anterior.

**7.7. Teorema do Valor Médio.** *Se $f$ é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável nos pontos internos, então existe um ponto interno $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{7.5}$$

*Demonstração.* Consideremos a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

cujo gráfico está ilustrado na Fig. 7.5, figura esta que é construída a partir da Fig. 7.6. Repare que $F$ se anula em $x = a$ e $x = b$. Aplicando a esta função $F$ o Teorema de Rolle, obtemos o resultado desejado na forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Geometricamente, isso significa que *existe um número $c$ entre $a$ e $b$, tal que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$* é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (Fig. 7.6).

Observe que a fórmula (7.5) é válida com $a$ e $b$ substituídos por dois números quaisquer $x_1$ e $x_2$ do intervalo $[a, b]$, não importa qual desses dois números é o menor, isto é,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2), \tag{7.6}$$

onde $c$ é um número conveniente entre $x_1$ e $x_2$.

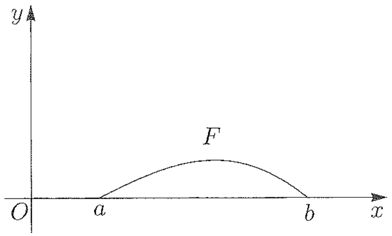


Figura 7.5

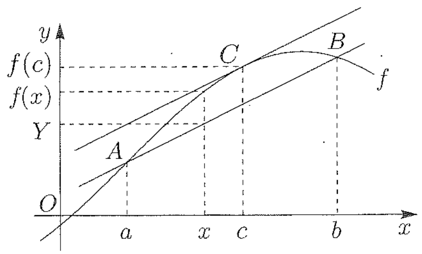


Figura 7.6

O Teorema do Valor Médio tem importantes conseqüências. Ele nos permite saber, por exemplo, se uma função é crescente ou decrescente, conforme sua derivada seja positiva ou negativa, respectivamente. Assim, se uma função tem derivada positiva em todo um intervalo $(a, b)$, de (7.6) obtemos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

donde $f$ é função crescente; e se a derivada for negativa em $(a, b)$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

e $f$ é decrescente.

## Exercícios

1. Seja $f$ uma função com derivada crescente (decrescente) em todo um intervalo. Prove que qualquer tangente ao gráfico de $f$ só toca esse gráfico no ponto de tangência.

2. Seja $f$ uma função com $f(0) = 0$ e $f'$ crescente em $(0, \infty)$. Prove que a função $g(x) = f(x)/x$ também é crescente em $(0, \infty)$.

3. Considere a função $f(x) = |x|^3 \operatorname{sen}^2(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Verifique que $f'(0) = 0$ e que $f'$ é contínua em toda a reta. (Este exemplo mostra que uma função pode ter ponto de mínimo — no caso, $x = 0$ — sem ser decrescente logo à esquerda e crescente logo à direita desse ponto.)



4. Seja $f$ uma função contínua num ponto $a$, derivável numa vizinhança $V'_\delta(a)$, tal que $f'(x)$ tenha limite finito com $x \to a$. Prove que $f$ é derivável em $x = a$ e que $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$. (Observe que a derivada $f'$ pode existir em toda uma vizinhança de $x = a$ e ser descontínua nesse ponto. É esse o caso da função $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ no ponto $x = 0$.)

5. Seja $f$ uma função tal que $f(x)$ e $f'(x)$ tenham limites finitos com $x \to \infty$. Prove que o limite de $f'$ é zero. Mostre, por um contra-exemplo, que $f$ pode ter limite sem que $f'$ o tenha. Interprete isso geometricamente.

6. Prove que um ponto crítico $x = a$ de uma função $f$ é de mínimo se a derivada $f'$ é negativa logo à esquerda e positiva logo à direita de $x = a$, isto é, se existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f'(x) < 0 < f'(y)$. Enuncie e prove propriedade análoga para o caso de máximo.

7. Prove que se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então $x = a$ é ponto de máximo; e é de mínimo se $f''(a) > 0$. Prove também que num ponto crítico de máximo, $f''(a) \leq 0$; e num ponto crítico de mínimo, $f''(a) \geq 0$.

8. Seja $f$ uma função definida num intervalo $[a, b]$. Prove que se $x = a$ for ponto de máximo, então $f'(a+) \leq 0$, desde que essa derivada exista. Enuncie e demonstre propriedade análoga no caso de mínimo; e também propriedades análogas no extremo $x = b$.

9. Prove que se a derivada de uma função $f$ tem limite $L$ com $x \to \infty$, então $L = \lim_{x\to\infty}[f(x)/x]$.

## Sugestões

1. Supondo que a tangente no ponto $(a, f(a))$ passe pelo ponto $(b, f(b))$, com $a < b$,

$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

onde $a < c < b$.

2. Pelo Teorema do Valor Médio, $g(x) = f(x)/x = f'(c)$, onde $c$ é um número entre zero e $x$. Como $f$ é crescente, $f'(c) < f'(x)$. Termine mostrando que $g'(x) > 0$.

5. $f(x+1) - f(x) = f'(c)$, $x < c < x + 1$. $f(x) = (1/x)\operatorname{sen} x^2$ é um contra-exemplo.

9. Considere a identidade

$$\frac{f(x)}{x} = \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{f(a)}{x - a}\right]\frac{x - a}{x}.$$

Sendo $a < x$, existe $c$ no intervalo $(a, x)$ tal que o primeiro termo no colchete é igual a $f'(c)$. Como o limite de $f'$ é $L$, dado $\varepsilon > 0$ existe $K$ suficientemente grande tal que $a > K \Rightarrow f'(c) = L + \eta$, onde $\eta < \varepsilon$. O $K$ deve ser suficientemente grande para que se tenha também $|f(a)/(x-a)| < \varepsilon$ e $|a/x| < \varepsilon$. Termine a demonstração.