Lista de Exercícios – Séries Numéricas

01/06/2019

1. Seja $\sum a_n$ uma série convergente com termo geral $a_n \geq 0$ e (b_n) uma sequência limitada. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge.

2. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum a_n^2$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa

3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge. dica: $(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 2ab \leqslant a^2 + b^2$.

4. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Mostre que se a série $\sum b_n$ converge e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, então $\sum a_n$ converge.

5. Mostre que: $\displaystyle\sum a_n$ converge $\iff \displaystyle\sum \frac{a_n}{a_n+1}$ converge. dica: $\frac{a_n}{a_n+1} \leqslant 2a_n$, para n grande.

6. Dados $a, r > 0$, mostre que se a série $\displaystyle\sum \frac{1}{a+nr}$ diverge.

7. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, mostre que a série abaixo é convergente e calcule a soma.
$$a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$$

8. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:
$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\ ,\ \ ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\ ,\ \ iii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}\ ,\ \ iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\ ,\ \ v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\ ,\ \ vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n - n}.$$

9. Sejam $a > 1$ um número real e k um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n},$$

10. Seja $P(x)$ um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge.

11. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n, 0 < a < 1 \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}, a > 0 \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}.$$

12. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.
$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}\ ,\ \ b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}\ ,\ \ c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}\ ,\ \ d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n},\ \ e)\ \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}.$$