1ª Prova de Espaços Métricos

23/12/2022

◇ Essa prova é composta de duas partes:

Parte 1. Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30: faça uma questão de cada seção e a quarta da seção que você preferir.

Parte 2. Enviar a resolução escaneada de todas as questões até às 24h de quarta-feira, 28/12, para o endereço: espacos.metricos.ufpr@gmail.com.

◇ Nesta prova M denota sempre um espaço métrico com métrica d.

Espaços Métricos

1. Seja $B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$ a bola de centro $a \in M$ e raio $r > 0$.
   a) Se $b \in B(a,r)$, mostre que existe uma bola aberta centrada em b e contida em $B(a,r)$;
   b) Mostre que o diâmetro da bola $B(a,r)$ é menor ou igual a $2r$;
   c) Dê um exemplo no qual $\operatorname{diam}(B(a,r)) < 2r$ é não nulo.

2. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no espaço métrico M que converge para o ponto $p \in M$.
   a) Mostre que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;
   b) Se $d^* \sim d$ (métricas equivalentes), mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} d^*(x_n, p) = 0$

Topologia dos Espaços Métricos

3. Sejam $A, B \subset M$ subconjuntos quaisquer. Mostre que:
   a) $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \cap B)$
   b) $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$
   c) Dê um exemplo no qual $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \neq \operatorname{int}(A \cup B)$

4. Dizemos que $p \in M$ é um ponto fronteira do conjunto $A \subset M$ se qualquer bola centrada em p contém pontos de A e de A^C. O conjunto fronteira de A, denotado $\partial(A)$, é formado por todos os pontos fronteira de A. Mostre que
   a) $\bar{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial(A)$
   b) $\partial(A) \subset A$ se e somente se A é fechado

5. Seja $A \subset M$ um conjunto aberto. Mostre que:
   a) A pode ser escrito como uma reunião de bolas abertas em relação a métrica d;
   b) Se $d^* \sim d$ (métricas equivalentes), mostre que A também é aberto em relação a d^*.

Continuidade em Espaços Métricos

6. Sejam $f, g : M \to M$ duas funções contínuas.

   a) Mostre que a função $h : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = d(f(x), g(y))$ é contínua;

   b) Se $d^* \sim d$ (métricas equivalentes), mostre que f também é contínua em relação a métrica d^*.

7. Seja $f : M \to M$ uma função contínua. Mostre que:

   a) Dados $p \in M$ e $r > 0$, o conjunto $f^{-1}(B(p, r)) = \{x \in M : f(x) \in B(p, r)\}$ é aberto;

   b) Se $\mathcal{U} \subset M$ é aberto, então $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in M : f(x) \in \mathcal{U}\}$ é aberto;

8. Seja $\varphi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ uma função estritamente crescente que satisfaz: $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, para todo $x, y \geq 0$. Mostre que:

   a) $\varphi \circ d$ é uma métrica em (M, d);

   b) se φ é contínua na origem então as métricas d e $\varphi \circ d$ são equivalentes.