

## Lista de Exercícios 2 – Fundamentos de Análise

Limites no infinito, seqüências de Cauchy e aproximações sucessivas

15/08/2022

- Dê exemplos de uma seqüência não limitada que:
  - não possui subsequências convergentes;
  - possui exatamente duas subsequências convergente;
  - possui exatamente três subsequências convergentes;
  - possui exatamente  $k$  subsequências convergentes, com  $k$  natural fixado;
  - possui subsequências convergindo para qualquer valor no intervalo  $(0, 1)$
- Seja  $(a_n)$  uma seqüência limitada e suponha que  $\lim b_n = +\infty$ . Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Prove as afirmações verdadeiras e dê contra-exemplos para as afirmações falsas
  - $\lim(a_n + b_n) = +\infty$ ;
  - $\lim(a_n - b_n) = -\infty$ ;
  - $\lim(a_n b_n) = +\infty$ ;
  - $\lim a_n/b_n = 0$ ;
  - $\lim(b_n/a_n) = +\infty$ ;
- Seja  $(a_n)$  uma seqüência não limitada. Mostre que  $(a_n)$  possui uma subsequência  $\{a_{n_k}\}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} = 0$
- Considere a seqüência polinomial  $p_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_k n^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$  fixado e  $c_0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , com  $c_k \neq 0$ . Mostre que:
  - $\lim p_n = \pm\infty$ , dependendo do sinal de  $c_k$ ;
  - $\lim \frac{p_n}{a^n} = 0$ , qualquer que seja  $a > 1$ ;
  - $\lim \sqrt[k]{p_n} = 1$
- Seja  $(x_n)$  uma seqüência de termos positivos que não possui nenhuma subsequência convergente, prove que  $(x_n)$  não é limitada.
- Seja  $(a_n)$  uma seqüência com  $\lim |a_n| = +\infty$ , prove que  $(a_n)$  não possui nenhuma subsequência limitada.
- Dê exemplo de uma seqüência **não limitada** que possui subsequências convergentes.
- Seja  $(a_n)$  uma seqüência não limitada. Mostre que  $(a_n)$  possui uma subsequência  $\{a_{n_k}\}$  que satisfaz  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} = 0$
- Seja  $x_1 = \sqrt{2}$  e defina  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ . Verifique que  $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$ . Conclua que existe o limite  $a = \lim x_n$  e calcule o valor de  $a$ .
- Vamos generalizar o exercício anterior. Seja  $a > 1$  um número qualquer e considere a seqüência  $x_1 = \sqrt{a}$  e  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}$ . Prove que o limite deste seqüência existe e calcule seu valor.
- Defina uma seqüência por  $x_1 = 1$  e  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ , para todo  $n > 1$ . Mostre que a seqüência  $(x_n)$  converge e calcule seu limite.