Lista de Exercícios – Séries Numéricas

15/08/2022

1. Seja $\sum a_n$ uma série convergente com termo geral $a_n \geq 0$ e (b_n) uma sequência limitada. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge.

2. Se $\sum a_n$ é uma série convergente, mostre que $\sum a_n^2$ converge. Dê um exemplo para mostrar que a recíproca é falsa

3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes com termo geral não negativo. Prove que a série $\sum a_n b_n$ converge. dica: $(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 2ab \leqslant a^2 + b^2$.

4. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos não negativos. Mostre que se a série $\sum b_n$ converge e $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, então $\sum a_n$ converge.

5. Mostre que: $\displaystyle\sum a_n$ converge $\iff \displaystyle\sum \frac{a_n}{a_n+1}$ converge. dica: $\frac{a_n}{a_n+1} \leqslant 2a_n$, para n grande.

6. Dados $a, r > 0$, mostre que se a série $\displaystyle\sum \frac{1}{a+nr}$ diverge.

7. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer, mostre que a série abaixo é convergente e calcule a soma.
$$a^2 + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dots$$

8. Prove que a série $\displaystyle\sum \text{sen}\,(1/n)$ diverge. dica: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

9. Use o critério da comparação para verificar qual das seguintes séries são convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$,
   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$,
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$,
   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n-n}$.

10. Sejam $a > 1$ e k um inteiro positivo. Mostre que as seguintes séries são convergentes:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$,
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$,
    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$,

11. Calcule as somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e use isso para mostrar que essa série converge e tem soma igual a 1.

12. Seja $P(x)$ um polinômio de grau superior a 1. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}$ converge.

13. Usando um teste de convergência, verifique quais das seguintes séries são convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^b a^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{2^{n^2}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{a^n 2^{n^2}}$.

14. Verifique quais das seguintes séries são convergentes. Para as séries que forem convergentes diga se a convergência é absoluta ou condicional.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n} \frac{1}{n}$