

Lista de Exercícios – Conjuntos finitos e infinitos

Envie a resolução escaneada (em PDF) até 04/09, para fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

1. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto qualquer, prove que as três afirmações abaixo são equivalentes:

- (a) X é finito;
- (b) X é limitado;
- (c) X possui elemento máximo.

2. Sejam A e B dois conjuntos finitos.

- (a) Mostre que $A \cap B$ é finito;
- (b) Mostre que $A \cup B$ é finito;
- (c) Mostre que A possui uma quantidade finita de subconjuntos
- (d) Se A tem n elementos, então o número funções bijetoras $f : A \rightarrow A$ é $n!$.

3. Prove que o conjunto \mathbb{P} dos números primos é infinito e enumerável.

Dica: Suponha que $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ é finito e seja $p_0 \in \mathbb{P}$ o maior número primo. A seguir mostre que $p_0! + 1$ não pode ser decomposto pelos primos de \mathbb{P} (contradição).

4. Seja $P \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números pares e $Q \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos quadrados perfeitos.

- (a) Mostre que os conjuntos P e Q são infinitos e enumeráveis;
- (b) Construa uma bijeção entre P e Q

5. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto infinito. Prove que existe uma função crescente $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

6. Sejam X_1, X_2, \dots, X_k conjuntos enumeráveis. Mostre que o conjunto abaixo é enumerável.

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_j \in X_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, k\}$$

7. Seja X um conjunto não enumerável. Se $X = A \cup B$, então pelo menos um dos conjuntos, A ou B é não enumerável.

8. Prove que o conjunto das palavras finitas formadas por um alfabeto finito é enumerável.

9. Dizemos que o número $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico se ele for a raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Caso α não seja algébrico, dizemos que ele é transcendente.

- (a) Prove que o conjunto dos números algébricos é enumerável.
- (b) Prove que o conjunto dos números transcendentos é não-enumerável.