Lista de Exercícios

Limites no infinito, sequências de Cauchy e aproximações sucessivas

06/11/2023

Envie a resolução escaneada (em PDF) até 17/11, para fundamentos.analise.ufpr@gmail.com.

1. Seja (a_n) uma sequência limitada e suponha que $\lim b_n = +\infty$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Prove as afirmações verdadeiras e dê contra-exemplos para as afirmações falsas

   (a) $\lim(a_n + b_n) = +\infty$;
   (b) $\lim(a_n - b_n) = -\infty$;
   (c) $\lim(a_n b_n) = +\infty$;
   (d) $\lim a_n/b_n = 0$;
   (e) $\lim(b_n/a_n) = +\infty$;

2. Seja (a_n) uma sequência não limitada. Mostre que (a_n) possui uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{a_{n_k}} = 0$

3. Considere a sequência polinomial $p_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_k n^k$, com $k \in \mathbb{N}$ fixado e $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, com $c_k \neq 0$. Mostre que:

   (a) $\lim p_n = \pm\infty$, dependendo do sinal de c_k;
   (b) $\lim \dfrac{p_n}{a^n} = 0$, qualquer que seja $a > 1$;
   (c) $\lim \sqrt[n]{p_n} = 1$

4. Seja (x_n) uma seqüência de termos positivos que não possui nenhuma subseqüência convergente, prove que (x_n) não é limitada.

5. Seja (a_n) uma sequência com $\lim |a_n| = +\infty$, prove que (a_n) não possui nenhuma subsequência limitada.

6. Dê exemplo de uma sequência **não limitada** que possui subsequências convergentes.

7. Seja (a_n) uma sequência não limitada. Mostre que (a_n) possui uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ que satisfaz $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{a_{n_k}} = 0$

8. Seja $x_1 = \sqrt{2}$ e defina $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Verifique que $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Conclua que existe o limite $a = \lim x_n$ e calcule o valor de a.

9. Vamos generalizar o exercício anterior. Seja $a > 1$ um número qualquer e considere a sequencia $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}$. Prove que o limite deste sequência existe e calcule seu valor.

10. Defina uma sequência por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, para todo $n > 1$. Mostre que a sequência (x_n) converge e calcule seu limite.