CAPÍTULO 3

NÚMEROS REAIS

3.1 O PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO

Quando introduzimos coordenadas em Geometria, escolhemos uma reta para ser o eixo dos x e este eixo é graduado de modo que haja uma correspondência entre pontos e números. Isto é feito escolhendo-se dois pontos arbitrários (porém distintos) como as posições do 0 e do 1, e a distância entre estes dois pontos como *unidade de comprimento* ou *unidade*. Convenciona-se escolher o ponto-1 direita do ponto-0 (Fig. 5), de modo que,

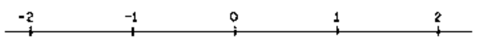

Figura 5

pontos à esquerda do ponto-0 fiquem associados a números negativos. O ponto-0 chamado *origem*. O ponto correspondente a 7, por exemplo, fica à direita da origem e a 7 unidades desta. O ponto correspondente a -7 fica à esquerda da origem, também a 7 unidades desta. Assim, a cada ponto fica associado um número, distância do ponto à origem, juntamente com um sinal mais, se o ponto estiver à direita da origem e um sinal menos, se estiver à esquerda. Como se vê na Fig. 6, números racionais como -4/3, 1/2 2,3 são facilmente localizados, dada sua relação com a unidade de comprimento.

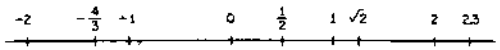

Figura 6

O símbolo $\sqrt{2}$ designa um número que, multiplicado por si mesmo, dá 2, isto é, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Para ver o significado geométrico de $\sqrt{2}$ consideremos um quadrado unitário como o da Fig. 7. O Teorema de Pitágoras nos diz que o quadrado do comprimento de sua diagonal é 2. Portanto, representamos o comprimento da diagonal por $\sqrt{2}$ e associamos o número $\sqrt{2}$ ao ponto da reta cuja distância à origem é igual ao comprimento da diagonal do nosso quadrado unitário.

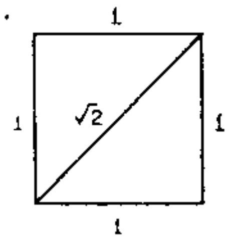

Figura 7. Um quadrado com lados de comprimento 1

Como cada ponto do eixo está a alguma distância da origem, fica intuitivamente claro que existe um número associado a cada um destes pontos. Por *números reais* entendemos a coleção de todos os números associados a todos os pontos. Todo número racional está incluído, porque existe um ponto, a uma distância apropriada da origem, para cada número racional. Podemos, então, dizer que os números racionais formam uma subclasse dos números reais.

No entanto, existem números reais que não são racionais. O número $\sqrt{2}$ não é racional, como provaremos mais adiante, neste capítulo. Qualquer número real, como $\sqrt{2}$, que não é racional, diz-se *irracional*. De acordo com esta definição, todo número real ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, na maneira descrita acima, é chamada *reta real*. Os pontos desta reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais.

Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois inteiros, diz-se irracional.

3.2 REPRESENTAÇÕES DECIMAIS

O número $1/3$ é facilmente localizado na reta real: ele corresponde a um dos pontos de trissecção do segmento determinado pelos pontos zero e um (Fig. 8).

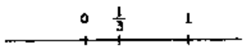

Figura 8

Consideremos, agora, a representação decimal de $1/3$:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots.$$

Esta igualdade expressa $1/3$ como uma soma de infinitos termos. Apesar de não haver fim para o número de termos, a soma tem um valor bem definido, isto é, $1/3$. Se marcarmos os pontos correspondentes a

$$0{,}3; \quad 0{,}33; \quad 0{,}333; \quad 0{,}3333; \ \ldots$$

na reta real, obteremos uma seqüência de pontos que converge para o ponto $1/3$. Este fato está ilustrado na Fig. 9, onde a unidade de comprimento foi ampliada. Da mesma maneira, qualquer número, com representação decimal infinita, está associado a algum ponto da reta real. O ponto correspondente a $0{,}99999\ldots$ é o ponto de convergência dos pontos correspondentes a

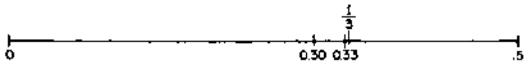

Figura 9

$$0{,}9; \quad 0{,}99; \quad 0{,}999; \quad 0{,}9999; \quad 0{,}99999; \quad \text{etc.}$$

Como se vê na Fig. 10, estes pontos convergem para o ponto 1, em

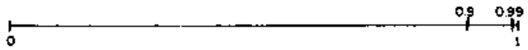

Figura 10

concordância com a igualdade $1 = 0{,}99999\ldots$ do capítulo anterior.

Consideremos, agora, o número

q = 0,101 001 000 100 001 000 001 000 000 1.. ...,

já anteriormente usado como exemplo vemos que a este número também corresponde um determinado ponto da reta real. É aquele para o qual converge a seguinte seqüência de pontos:

0,1;

0,101;

0,101 001;

0,101 001 000 1;

0,101 001 000 100 001; etc.

O número q, por ter uma representação decimal não periódica, é um número irracional, e o ponto correspondente um ponto irracional.

Isto sugere uma outra interpretação para os números reais. Números reais constituem a coleção de todos os números que possuem representações decimais, finitas ou infinitas, tais como

17,34; 2,176; -6,307 222 22...; q = 0,101 001 000 1... .

De acordo com nossos estudos do capítulo anterior, podemos separar estes números em racionais e irracionais. Os números racionais são aqueles que possuem representação decimal finita ou periódica; os números irracionais são aqueles que não possuem representação decimal periódica, como o número q acima. Além do mais, como todo número com representação decimal finita (ou, números como 0,43000... com uma sucessão infinita de zeros) também pode ser escrito na forma de dízima periódica infinita, vamos, nesta secção, representar todos os números racionais por dízimas periódicas infinitas. (Por exemplo, vamos pensar no número 0,43 como sendo 0,42999...; talvez pareça esquisito, mas simplificará o que vem a seguir.)

Vamos mostrar agora que *números reais têm uma única representação decimal infinita*. É o mesmo que dizer: *duas frações decimais infinitas representam o mesmo número real somente se forem idênticas, algarismo por algarismo*.

Por que a representação decimal infinita é única? Responderemos a esta pergunta da seguinte maneira: considere dois números com representações decimais infinitas distintas. Sendo as representações diferentes, existe ao menos um algarismo onde esta diferença pode ser observada; por exemplo,

$$a = 17{,}923416...,$$
$$b = 17{,}923415....$$

A sucessão infinita de algarismos após o "6", na representação do número a, pode ser qualquer uma que o leitor queira imaginar, exceto uma infinidade de zeros. Uma observação análoga vale para o número b. O fato de excluirmos a possibilidade de uma sucessão infinita de zeros após o "6", nos garante que a é definitivamente maior do que 17,923416, o que, em símbolos, se escreve:

$$a > 17{,}923416$$

Por outro lado, b é no máximo igual a 17,923416, pois só teremos $b = 17,923416$ se a sucessão de algarismos após o "5", na representação de b, for constituída apenas de noves, isto é, se $b = 17,923415\overline{9}$. A afirmação de que b é no máximo igual a 17,923416, escreve-se, simbolicamente:

$$b \leqq 17,923416 \quad \text{ou} \quad 17,923416 \geqq b.$$

Estas desigualdades para a e b afirmam:

$$a > 17,923416 \geqq b$$

e, portanto, $a > b$. Concluímos, então, que a é maior do que b e isto, naturalmente, exclui a possibilidade de serem iguais. Este argumento foi aplicado ao caso específico de dois números particulares a e b, mas o raciocínio se generaliza imediatamente para qualquer par de números que tenham representações decimais infinitas distintas.

3.3 A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

Daremos, agora, a demonstração indireta, tradicional, da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e, no próximo capítulo, daremos outra demonstração, usando um argumento muito mais geral.

Mostramos, no Capítulo 1, que os inteiros pares são fechados em relação à multiplicação, o mesmo acontecendo com os inteiros ímpares. Em particular, o quadrado de um inteiro par é par e o quadrado de um inteiro ímpar é ímpar.

Suponhamos, agora, que $\sqrt{2}$ fosse um número racional, isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

onde a e b são inteiros. Suponhamos ainda, e isto é essencial para o argumento, que a/b seja uma fração irredutível, isto é, que a e b sejam primos entre si. Usaremos, especificamente, o fato de a e b não serem ambos pares porque, se o fossem, a/b não seria irredutível. Elevando ao quadrado a equação acima e simplificando, obtemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad a^2 = 2b^2.$$

O termo $2b^2$ representa um inteiro par, de modo que a^2 é um inteiro par e, portanto, a é um inteiro par, digamos $a = 2c$, onde c também é inteiro. Substituindo a por $2c$ na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos

$$(2c)^2 = 2b^2, \quad 4c^2 = 2b^2, \quad 2c^2 = b^2.$$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que b^2 é um inteiro par e, portanto, b é um inteiro par. Mas agora chegamos à conclusão de que a e b são ambos inteiros pares, enquanto a e b foram, inicialmente, supostos primos entre si. Esta contradição nos leva à conclusão de que não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma a/b com a e b inteiros e, portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

3.4 A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{3}$

Uma das demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{3}$ é semelhante à anterior, exceto que o argumento chave envolve divisibilidade por 3 e não por 2. Provaremos, como resultado preliminar, que *o quadrado de um inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 3*. Observemos, inicialmente, que um inteiro divisível por 3 é da forma $3n$, enquanto que um inteiro não divisível por 3 é da forma $3n+1$ ou $3n+2$. Então as equações

$$(3n)^2 = 9n^2 = 3(3n^2),$$

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1,$$

$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$$

confirmam a proposição acima.

Suponhamos agora que $\sqrt{3}$ fosse um número racional, digamos

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b},$$

onde a e b são inteiros. Novamente, como no caso do $\sqrt{2}$, suporemos a/b irredutível, de modo que a e b não sejam ambos divisíveis por 3. Elevando a equação ao quadrado e simplificando, obtemos

$$3 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 3b^2.$$

O inteiro $3b^2$ é divisível por 3, isto é, a^2 é divisível por 3. Portanto a é divisível por 3, digamos, $a = 3c$, onde c é um inteiro. Substituindo a por $3c$ na equação $a^2 = 3b^2$, obtemos

$$(3c)^2 = 3b^2, \quad 9c^2 = 3b^2, \quad 3c^2 = b^2.$$

Isto mostra que b^2 é divisível por 3 e, portanto, b é divisível por 3. Concluímos, assim, que a e b são ambos divisíveis por 3 e isto contraria a hipótese inicial de ser a/b irredutível. Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional

3.5 IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{6}$ E $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

As demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ dependeram de propriedades da divisibilidade de inteiros por 2 e por 3, respectivamente, mas a demonstração correspondente a $\sqrt{6}$ pode ser feita, de modo a recair na divisibilidade por 2 ou por 3. Por exemplo, acompanhando a demonstração feita para $\sqrt{2}$, podemos supor que

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b}$$

onde os inteiros a e b não são ambos pares. Elevando ao quadrado, obtemos

$$6 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a^2 = 6b^2.$$

Mas, $6b^2$ é par, assim a^2 é par e, portanto, a é par, digamos $a = 2c$. Podemos, então, escrever

$$a^2 = 6b^2, \quad (2c)^2 = 6b^2, \quad 4c^2 = 6b^2, \quad 2c^2 = 3b^2.$$

Isto nos diz que $3b^2$ é par, de modo que b^2 é par e, portanto, b é par. Mas foi suposto que a e b não fossem ambos pares e, portanto, $\sqrt{6}$ é irracional. O leitor pode, a título de exercício, deduzir o mesmo resultado fazendo uma demonstração análoga à que foi feita para $\sqrt{3}$.

Como um último exemplo, neste capítulo, trataremos da irracionalidade de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fazendo a demonstração recair na irracionalidade de $\sqrt{6}$. Suponhamos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse um número racional, digamos r, isto é,

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2, \quad 2\sqrt{6} = r^2-5, \quad \sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}.$$

Mas, números racionais são fechados em relação às quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero) e, portanto, $\frac{1}{2}(r^2-5)$ é um número racional. Mas $\sqrt{6}$ é irracional e, assim, chegamos a uma contradição. Concluímos, então, que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Sabendo que o inteiro $n = a \cdot b$ é tal que $\sqrt{n} = \sqrt{a \cdot b}$ é irracional, pode-se, imitando a demonstração acima, provar que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional.

Problemas - Lista 10

1. Demonstre, de duas maneiras, que o quadrado de um inteiro é divisível por 5 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por 5:
   (a) Inicialmente faça uma demonstração paralela à do texto no caso da divisibilidade por 3. Parta do fato de que todo inteiro tem uma das 5 formas: $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$.
   (b) Em seguida, faça outra demonstração, usando o Teorema Fundamental da Aritmética. Este teorema encontra-se no Capítulo 1 e também no Apêndice B.
2. Demonstre que $\sqrt{5}$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt{15}$ é irracional.
4. Demonstre que $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ é irracional.
5. Demonstre que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.
6. Dado que α (alfa) é um número irracional, demonstre que $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ também é irracional.
7. O número 0 é racional ou irracional?

3.6 AS PALAVRAS QUE USAMOS

A linguagem que usamos para descrever as várias classes de números faz parte de nossa herança histórica e, sendo assim, é pouco provável que ela mude, apesar de sentirmos que algumas palavras sejam ligeiramente peculiares. Por exemplo, na linguagem de todo dia, ao dizermos que algo é "irracional", queremos, em geral, dizer que este algo é desprovido de bom senso, sendo, portanto, contrário à razão. Mas, é claro que não consideramos números irracionais como contrários à razão. Aparentemente, os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais porque eles pensavam que, dados dois segmentos quaisquer, como o lado e a diagonal de um quadrado, existiriam sempre inteiros a e b tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse a/b. O significado matemático da palavra "racional" se refere à razão de números inteiros e "irracional" se refere a ausência de uma tal razão.

A palavra "comensurável" tem sido usada para descrever dois comprimentos cuja razão é um número racional. Duas grandezas *comensuráveis* são tais que uma delas pode ser "medida" por intermédio da outra, no seguinte sentido: Existe um inteiro k tal que, se dividirmos o primeiro segmento em k partes iguais, cada uma de comprimento ℓ, o segundo segmento também poderá ser dividido em um número inteiro, digamos m, de partes iguais,

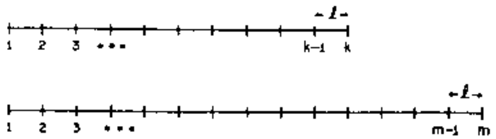

Figura 11

cada uma de comprimento ℓ. Neste caso, a razão dos comprimentos dos dois segmentos será

$$\frac{k\ell}{m\ell} = \frac{k}{m},$$

que é um número racional (veja Fig. 11). Porém, se os segmentos forem tais que a razão de seus comprimentos é irracional (por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado), então a construção acima nunca poderá ser feita, não importando quão grande escolhamos k (e quão pequeno escolhamos ℓ)! Neste caso, os segmentos dados se dizem *incomensuráveis*.

Números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24}$ ou, em geral, números da forma $\sqrt[n]{a}$, onde a é racional e n inteiro, são chamado *radicais*.

O termo "números reais" é uma outra herança do passado. Se fôssemos escolher um nome hoje em dia, talvez os chamássemos de "números uni-dimensionais". De qualquer modo, não consideramos "irreais" números que não sejam reais. O leitor estará provavelmente familiarizado com os números complexos dos quais os números reais formam uma subclasse. Um número complexo é um número da forma $a + bi$, onde a e b são reais e i satisfaz a fórmula quadrática $i^2 = -1$. Esta definição está sendo introduzida apenas para completar a discussão sobre classe de números. O escopo deste livro se limita aos números reais, portanto não nos ocuparemos da classe mais ampla dos números complexos.

3.7 UMA APLICAÇÃO À GEOMETRIA

Muitos textos didáticos de Geometria, do 1º e 2º graus, apresentam demonstrações incompletas, quando estas envolvem números irracionais. A falha ocorre quando o resultado é demonstrado apenas para o caso racional, deixando o caso irracional inacabado. Isto acontece freqüentemente com o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Se três paralelas são cortadas por duas transversais, com ponto de intersecção* A, B, C, A', B', C', *como na Fig. 12, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

onde, por exemplo, AB *representa o comprimento do segmento determinado por* A *e* B.

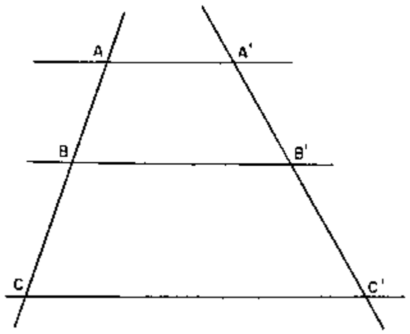

Figura 12

Este teorema pode ser usado para demonstrar o teorema fundamental sobre semelhança de triângulos: *se os três ângulos de um triângulo forem, respectivamente, iguais aos três ângulos de outro triângulo, então os lados correspondentes serão proporcionais* (Fig. 13). Este resultado, por sua vez, é muitas vezes

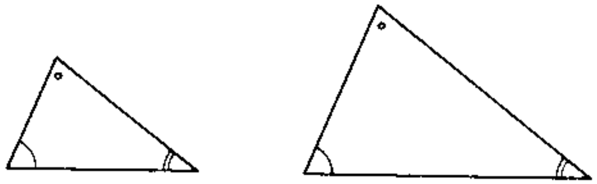

Figura 13

usado para demonstrar o Teorema de Pitágoras e, assim, Trigonometria e Geometria Analítica são construídas com base nestes teoremas.

Vamos, agora, provar o Teorema 3.1 para o caso em que AB/BC é irracional. Vamos aceitar a validade do Teorema 3.1 no caso de AB/BC ser racional, pois esta parte do teorema é, em geral, demonstrada nos livros de Geometria Elementar. Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1 para AB/BC irracional, será útil estabelecer o seguinte resultado preliminar:

Teorema 3.2. *Se* m *e* n *forem inteiros positivos tais que*

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

então

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Demonstração. Começaremos com uma construção. Vamos dividir o segmento BC em n partes iguais, cada parte de comprimento α, de modo que $BC = n\alpha$. Marquemos, a seguir, mais m destes pedaços de comprimento α ao longo do segmento BA, terminando no ponto D.

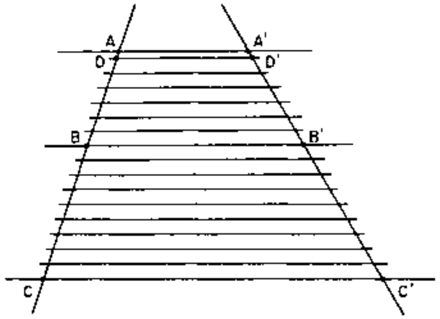

Figura 14

Provaremos, inicialmente, que D está entre B e A, como na Fig. 14. Como $BC = n\alpha$ e $DB = m\alpha$, podemos escrever

$$\frac{DB}{BC} = \frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n};$$

por hipótese

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

e, assim,

$$\frac{DB}{BC} < \frac{AB}{BC}.$$

Esta última desigualdade implica $DB < AB$, pois ambas as frações têm o mesmo denominador BC. Assim, sendo DB mais curto do que AB, segue-se que D está no interior do segmento AB.

Em seguida, tracemos retas paralelas a AA' por todos os pontos de divisão, sendo D' o ponto correspondente de D, no lado direito, como na Fig. 14. Usando o Teorema 3.1 no caso racional (que estamos supondo válido), $B'C'$ ficará dividido em n partes iguais e $D'B'$, em m partes iguais do mesmo comprimento, de modo que

$$\frac{D'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}.$$

No entanto, na Fig. 14, observamos que $D'B' < A'B'$ e por isso concluímos que

$$\frac{D'B'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'}, \quad \frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}$$

Corolário do Teorema 3.2. *Se* $\frac{m}{n} > \frac{AB}{BC}$, *então* $\frac{m}{n} > \frac{A'B'}{B'C'}$.

Este corolário é análogo ao Teorema 3.2 e, portanto, sua demonstração também é análoga.

Demonstramos, assim, o Teorema 3.2 e um corolário; vamos agora usá-los para demonstrar o Teorema 3.1, no caso irracional. Seja β um número irracional representando a razão AB/BC. Usaremos a representação decimal de β, como na Secção 3.2.

Para ilustrar a passagem seguinte, façamos β assumir o valor $\pi = 3{,}14159\ldots$, por exemplo. Podemos, então, escrever

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{3}{1} &< \beta < \frac{4}{1}, \\ \frac{31}{10} &< \beta < \frac{32}{10} \\ \frac{314}{100} &< \beta < \frac{315}{100} \\ \frac{3141}{1000} &< \beta < \frac{3142}{1000}, \ldots, \text{ etc.} \end{aligned}$$

As frações, à esquerda, são obtidas, tomando os números 3; 3,1; 3,14; 3,141; da representação decimal de π. As frações do lado direito são obtidas, aumentando estes mesmos números de 1; 0,1; 0,01; 0,001; etc.

A cadeia de desigualdades (1) é infinita; escrevemos somente as primeiras quatro. Estas desigualdades *caracterizam* o valor particular do β em questão, isto é, caracterizam π. Ou seja, se um número β satisfizer todas as desigualdades (1), então este número é igual a π.

As desigualdades (1) foram escritas em conexão com um exemplo ilustrativo, onde β tinha o valor π. Abandonaremos agora este exemplo, mas ressaltamos que, qualquer que seja o valor irracional que β possa ter, sua representação decimal fornecerá uma cadeia de desigualdades

$$\frac{a_1}{1} < \beta < \frac{1+a_1}{1},$$

$$\frac{a_2}{10} < \beta < \frac{1+a_2}{10},$$

$$(2) \qquad \frac{a_3}{100} < \beta < \frac{1+a_3}{100}$$

$$\frac{a_4}{1000} < \beta < \frac{1+a_4}{1000}, \ldots, \text{ etc.}$$

que caracterizará β de modo único e, em cada desigualdade, β estará entre dois números racionais. Os símbolos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ representam inteiros.

Nossa intenção é fazer β' representar a razão $A'B'/B'C'$ e demonstrar que β' também satisfaz as desigualdades (2), tal qual β. Mas, estas desigualdades caracterizam o número β e, portanto, β' ficará identificado com β, de modo que

$$\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \beta'.$$

Só falta, então, demonstrar que β' satisfaz as desigualdades (2). Para isto usaremos o Teorema 3.2. Inicialmente, escolhamos qualquer um dos números $a_1/1$, $a_2/10$, $a_3/100$, etc., digamos, $a_3/100$ e interpretemos este como sendo o número racional m/n do Teorema 3.2. Então, a hipótese do Teorema 3.2,

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC}.$$

se transforma em

$$\frac{a_3}{100} < \beta,$$

e isto é válido por causa das desigualdades (2). Logo, o Teorema 3.2 nos diz que

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'},$$

isto é,

$$\frac{a_3}{100} < \beta'.$$

Vemos, assim, que β' satisfaz

$$\frac{a_1}{1} < \beta', \quad \frac{a_2}{10} < \beta', \quad \frac{a_3}{100} < \beta', \quad \frac{a_4}{1000} < \beta', \quad \text{etc.}$$

Fazendo um uso análogo do corolário do Teorema 3.2, obtemos as desigualdades

$$\beta' < \frac{1+a_1}{1}, \quad \beta' < \frac{1+a_2}{10}, \quad \beta' < \frac{1+a_3}{100}, \quad \beta' < \frac{1+a_4}{1000}, \quad \text{etc.}$$

Portanto, β' satisfaz as desigualdades (2) tal qual β; logo, $\beta = \beta'$, o que completa a demonstração do Teorema 3.1.

3.8 UM RESUMO

Neste capítulo mostramos que todo número real pode ser posto em correspondência com exatamente um ponto da "reta real". Vimos também que todo número real tem exatamente uma representação decimal infinita (desde que excluamos uma sucessão infinita de zeros, isto é, representações decimais finitas). Esta representação decimal infinita foi usada na Secção 3.7 para demonstrar um teorema chave da Geometria Elementar. Além disso, demonstramos a irracionalidade de certos números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, etc. Nossos métodos, no entanto, foram bastante particulares e não descrevemos nenhum procedimento muito geral para determinar se um dado número é racional.

No próximo capítulo estudaremos números irracionais de uma maneira muito mais sistemática. Vamos achar um processo pelo qual uma grande classe de números pode ser classificada como uma classe de números irracionais.

NÚMEROS IRRACIONAIS

No decorrer deste capítulo e do próximo vamos aprender que os números reais podem ser classificados não apenas em racionais e irracionais, mas também em duas outras categorias. Uma categoria contém os assim chamados *números algébricos*, isto é, números que são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros, e uma outra contém todos os demais números, sendo estes chamados *números transcendentes*. A distinção se tornará mais significativa no decorrer da exposição. Porém mencionaremos imediatamente que alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, mas todos os números transcendentes são irracionais.

A finalidade global deste capítulo é chegar a um método sistemático que permita determinar se um dado número algébrico é ou não racional. (Não vamos, realmente, tratar a classe dos números algébricos em toda sua generalidade, mas vamos aplicar nosso método a muitos exemplos.) Antes de obter este método, estudaremos algumas propriedades simples dos números irracionais.

4.1 PROPRIEDADES DE FECHAMENTO

Em contraste com os números racionais, que são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero), os números irracionais não possuem nenhuma destas propriedades. Antes de mostrar este fato, vamos demonstrar um teorema que nos permitirá produzir uma infinidade de números irracionais a partir de um número irracional dado.

Teorema 4.1. *Seja* α *um número irracional qualquer e* r *um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de* r *e* α *resultarão em números irracionais. Também* $-\alpha$ *e* α^{-1} *são irracionais.*

Demonstração. Estes resultados podem ser facilmente obtidos através de demonstrações indiretas. Suponhamos, para começar, que $-\alpha$ fosse racional, digamos, $-\alpha = r'$, onde r' é um pressuposto número racional. Então teríamos $\alpha = -r'$, onde $-r'$ também é um número racional. Isto é uma contradição, porque α é irracional.

O teorema afirma que $-\alpha$, α^{-1}, $\alpha+r$, $\alpha-r$, $r-\alpha$, $r\alpha$, α/r e r/α são irracionais. Já vimos o caso do $-\alpha$. Para provar a irracionalidade de α^{-1}, observamos tratar-se de um caso especial de r/α com $r = 1$. Portanto, não há necessidade de tratar este caso separadamente.

Vamos provar os seis casos restantes de uma só vez, por atacado. Se uma ou mais destas expressões fossem racionais, então teríamos uma ou mais das seguintes equações:

$$\alpha+r = r_1, \quad \alpha-r = r_2, \quad r-\alpha = r_3, \quad r\alpha = r_4, \quad \frac{\alpha}{r} = r_5, \quad \frac{r}{\alpha} = r_6,$$

onde $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ representam números racionais. Resolvendo estas equações em α, obteríamos

$$\alpha = r_1 - r, \quad \alpha = r_2 + r, \quad \alpha = r - r_3, \quad \alpha = \frac{r_4}{r}, \quad \alpha = rr_5, \quad \alpha = \frac{r}{r_6}.$$

Os segundos membros destas equações são números racionais por causa das propriedades de fechamento dos números racionais. Mas nenhuma destas igualdades é verdadeira, pois α é irracional. Portanto, é impossível que qualquer um dos números $\alpha+r$, $\alpha-r$, etc. seja racional, completando assim a demonstração do teorema.

Usando o Teorema 4.1 podemos construir uma grande classe de números irracionais a partir de um só destes números, por exemplo, a partir de $\sqrt{2}$. Aplicando cada uma das afirmações do teorema, podemos dizer, por exemplo, que

$$-\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}+5, \quad 3-\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{4}{\sqrt{2}}$$

são todos irracionais. Como uma infinidade de números racionais pode ser usada em cada afirmação do teorema, fica claro que podemos produzir assim uma infinidade de números irracionais.

Além do mais, qualquer um dos números assim construídos, como por exemplo $\sqrt{2} + 5$, pode agora ser usado como um novo número irracional α no teorema. E assim, uma nova infinidade de números irracionais,

$$-\sqrt{2}-5, \quad \frac{1}{\sqrt{2}+5}, \quad \sqrt{2}+8, \quad 5\sqrt{2}+25, \quad \frac{\sqrt{2}+5}{7}, \quad \text{etc.},$$

poderá ser gerada a partir deste número.

Será que os números irracionais são fechados em relação à adição? Não, não são. Para demonstrar este fato basta exibirmos dois números irracionais cuja soma seja racional. No capítulo anterior vimos que $\sqrt{2}$ é irracional e, portanto, pelo Teorema 4.1, $-\sqrt{2}$ é irracional. Mas a soma de $\sqrt{2}$ com $-\sqrt{2}$ é 0, que é racional; o mesmo acontece com a soma de $3+\sqrt{2}$ e $5-\sqrt{2}$, por exemplo. De um modo mais geral, a soma de $r_1+\alpha$ com $r_2-\alpha$ (onde r_1 e r_2 são racionais e α irracional), é racional.

Dizer que os números irracionais não são fechados em relação à adição não significa que se somarmos dois números irracionais *quaisquer* a soma será racional. Significa apenas que existe pelo menos um caso onde a soma *é* racional. O resultado obtido, quando dois números irracionais são somados, pode ser racional ou irracional, dependendo dos dois números iniciais. Enquanto a soma de $\sqrt{2}$ com $-\sqrt{2}$ é um número racional, a soma de $\sqrt{2}$ com $\sqrt{3}$ é um número irracional, como foi visto no capítulo anterior.

Será que os números irracionais são fechados em relação à subtração? Não, pois, por exemplo, se subtrairmos $\sqrt{2}$ de si mesmo, obteremos o número racional 0.

Analogamente, os números irracionais não são fechados em relação à multiplicação ou divisão. Estes resultados são tão

semelhantes aos anteriores que deixaremos suas demonstrações para o leitor, na lista de problemas a seguir.

Problemas - Lista 11

(Em alguns dos problemas será útil usar alguns dos resultados do capítulo anterior, a saber, que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ são irracionais).

1. Exiba dois números irracionais cuja diferença seja irracional.
2. Exiba dois números irracionais cujo produto seja racional e demonstre assim que os números irracionais não são fechados em relação à multiplicação.
3. Exiba dois números irracionais cujo produto seja irracional.
4. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional e demonstre assim que os números irracionais não são fechados em relação à divisão.
5. Exiba dois números irracionais cujo quociente seja racional.

*6. Demonstre que $\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)$ é irracional.

7. Seja α um número irracional positivo. Demonstre que $\sqrt{\alpha}$ é irracional.
8. Dado que α e β são irracionais, mas $\alpha+\beta$ é racional, demonstre que $\alpha-\beta$ e $\alpha+2\beta$ são irracionais.

4.2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Demonstramos no capítulo anterior que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$ são irracionais. Como é de se esperar (e talvez o leitor já o saiba), números como $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[5]{91}$ também são irracionais. Gostaríamos, agora, de estabelecer a irracionalidade de todos estes números por um processo abrangente, ao invés de estudar cada número separadamente. Para isto vamos transferir a ênfase dos números em si para equações algébricas simples que tenham estes números como raízes. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é uma raiz da equação $x^2-2=0$ ou, em outras palavras, $\sqrt{2}$ é uma solução de $x^2-2=0$, ou ainda, $\sqrt{2}$ satisfaz a equação $x^2-2=0$. Analogamente, os outros números acima mencionados satisfazem equações como as seguintes:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}, && x^2-3=0,\\ &\sqrt{6}, && x^2-6=0,\\ &\sqrt{7}, && x^2-7=0,\\ &\sqrt[3]{5}, && x^3-5=0,\\ &\sqrt[5]{91}, && x^5-91=0. \end{aligned}$$

Vamos provar que estas equações e, mais geralmente, todas as equações satisfazendo certas condições, não possuem raízes racionais. Para começar, precisaremos definir alguns termos usados para descrever equações.

Por um *polinômio de 2º grau em x* entendemos uma expressão da forma ax^2+bx+c, onde a, b e c são chamados

coeficientes. Um *polinômio de grau 3* é da forma ax^3+bx^2+cx+d. Para evitar a introdução de novas letras à medida que aumentarmos o grau, convém escrever

$$c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0.$$

Um polinômio de grau n (onde n é um inteiro positivo) tem a forma $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0$, com c_n diferente de zero. Uma *equação polinomial* é uma igualdade da forma

(1) $$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0=0;$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ são chamados *coeficientes*.

Exemplo. Identifique os valores de n, c_n, etc. quando a equação

$$3x^6+2x^5-x^4+10x^3+4x-7=0$$

for interpretada como tendo a forma (1) acima.

Solução. Comparando, diretamente, vemos que

$n=6$, $c_6=3$, $c_5=2$, $c_4=-1$, $c_3=10$, $c_2=0$, $c_1=4$, $c_0=-7$.

Observe que a exigência de serem inteiros os coeficientes da eq. (1) não é mais restritiva do que a exigência de serem estes coeficientes racionais; pois se eles forem racionais, então $c_0 = a_0/b_0$, $c_1 = a_1/b_1$, $c_2 = a_2/b_2, \ldots$, onde os a's e os b's são inteiros. Todas estas frações podem ser escritas com um denominador comum, por exemplo, o produto $b_0 b_1 b_2 \ldots b_n$, pelo qual podemos multiplicar ambos os membros da equação e obter, assim, uma nova, com coeficientes inteiros e cujas raízes são as mesmas da equação original.

Recordemos que uma *raiz* de uma equação em x é um número, que, substituído no lugar de x, satisfaz a equação. Por exemplo, já observamos que $\sqrt{7}$ é uma raiz de $x^2 - 7 = 0$.

Exemplo. O número 2/5 é raiz de $10x^3+6x^2+x-2 = 0$?

Solução. Substituindo 2/5 no lugar de x, obtemos

$$10\left(\frac{2}{5}\right)^3 + 6\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} - 2 = 0,$$

e esta é uma sentença correta da aritmética. Portanto, 2/5 é uma raiz da equação.

Estamos prontos, agora, para retornar ao ponto principal. Repetimos que o método que vamos desenvolver para decidir se um dado número é ou não racional pode ser aplicado se, e somente se, conseguirmos escrever uma equação polinomial que tenha por raiz o número em consideração. O método pode ser usado não apenas para os números cuja irracionalidade ficou provada no capítulo anterior, mas também para qualquer número que possa ser

escrito como uma combinação finita dos símbolos +, -, ×, ÷ e radicais $\sqrt[n]{r}$ de números racionais. Por exemplo,

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{\sqrt[10]{7} - \sqrt[11]{7}}}{\sqrt[156]{25}}$$

é um caso complicado do tipo de número que estamos descrevendo.

Não vamos provar, neste livro, que todos estes números são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros, mas vamos escrever equações polinomiais satisfeitas por muitos deles.

Problemas - Lista 12

1. Indique os valores de n, c_n, etc., quando as seguintes equações são interpretadas como sendo da forma da eq. (1) acima:

   (a) $15x^3 - 23x^2 + 9x - 1 = 0$;

   (b) $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$;

   (c) $2x^3 + 7x^2 - 3x - 18 = 0$;

   (d) $2x^4 - x^2 - 3x + 5 = 0$;

   (e) $3x^5 - 5x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0$;

   (f) $x^4 - 3x^2 - 5x + 9 = 0$.

2. Em relação às equações do exercício anterior:

   (a) o número 1/3 é uma raiz de (a)?

   (b) o número -2/3 é uma raiz de (b)?

(c) o número $3/2$ é uma raiz de (c)?

(d) o número 2 é uma raiz de (d)?

(e) o número -2 é uma raiz de (e)?

(f) o número $1/2$ é uma raiz de (f)?

3. Prove que $\sqrt{7}$ é uma raiz de $\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3} = 0$.

4. Prove que se um número for raiz de uma equação polinomial do tipo

$$\frac{a_3}{b_3}x^3 + \frac{a_2}{b_2}x^2 + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0} = 0$$

com coeficientes racionais a_3/b_3, etc., então este número será raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros.

5. Generalize o resultado do problema anterior, do caso de equações de grau 3, para equação de grau n.

4.3 RAÍZES RACIONAIS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

É nosso propósito deduzir agora uma regra simples, sob forma do Teorema 4.3, abaixo, que nos possibilite encontrar todas as raízes racionais de uma dada equação polinomial com coeficientes inteiros. Seremos assim capazes de separar as raízes racionais das irracionais de uma equação e, assim, estabelecer a irracionalidade de uma ampla classe de números.

Inicialmente precisaremos de um resultado auxiliar.

Teorema 4.2. *Sejam u, v e w inteiros tais que u seja um divisor de vw e u e v não tenham fatores primos comuns. Então u é um divisor de w. De um modo mais geral, se u for um divisor de $v^n w$, onde n é um inteiro positivo qualquer, e u e v não tiverem fatores primos comuns, então u será um divisor de w.*

Antes de apresentar uma demonstração, ilustremos esta proposição com alguns exemplos.

(1) Sejam $u = 2$, $v = 3$ e $vw = 12$. Os números 2 e 3 não têm fatores primos comuns. Também, 2 é um divisor de 12, de modo que as hipóteses do Teorema 4.2 estão satisfeitas. A conclusão de que 2 é um divisor de $w = 12/v = 4$ é válida.

(2) Sejam $u = 4$, $v = 5$ e $v^3 w = 500$. Os números 4 e 5 não têm fatores primos comuns e 4 é um divisor de 500. A afirmação mais geral de que 4 é um divisor de $w = 500/125 = 4$ também é válida.

Demonstração. O ingrediente principal desta demonstração é o Teorema Fundamental da Aritmética, demonstrado no Apêndice B na parte final deste livro. Ele nos assegura que existe apenas uma maneira de decompor u, v e w em fatores primos. Como u é um divisor de vw, todos os fatores primos de u ocorrerão também em vw; além do mais, se algum primo p ocorrer em u, elevado a um expoente α, ele também ocorrerá em vw com, ao menos, o mesmo expoente, isto é, ocorrerá em vw com um expoente β, onde $\beta \geq \alpha$. Como u e v não têm fatores primos comuns, segue-se que todos os fatores primos de u ocorrerão na fatoração de w, com, ao menos, o mesmo expoente. Portanto u é um divisor de w.

Podemos usar o mesmo argumento para a última afirmação do teorema. A hipótese de u e v não possuirem fatores primos comuns nos assegura que u e v^n não possuem fatores primos comuns. Novamente segue-se que v^n não contribui em nada ao fato de u ser um divisor de $v^n w$ e, portanto, u terá que ser um divisor de w.

Temos agora informação suficiente para enunciar e provar a seguinte proposição:

Teorema 4.3. *Consideremos uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros:*

$$(1) \quad c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0.$$

Se esta equação tiver uma raiz racional a/b, onde a/b é uma fração irredutível, então a será um divisor de c_0 e b um divisor de c_n.

Novamente, ilustraremos esta afirmação através de um exemplo, antes de apresentarmos a demonstração. Consideremos a equação

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0.$$

O teorema afirma que se a/b for uma raiz racional, a/b irredutível, então a será um divisor de -3 e b será um divisor de 2. Portanto, os possíveis valores de a são $+1, -1, +3$ e -3 e os de b são $+1, -1, +2$ e -2. Combinando estas possibilidades, vemos que o seguinte conjunto contém todas as possíveis raízes racionais:

$$\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2},$$

$$\frac{+3}{+1}, \frac{+3}{-1}, \frac{+3}{+2}, \frac{+3}{-2}, \frac{-3}{+1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{+2}, \frac{-3}{-2}.$$

Esta lista contém apenas 8 números distintos, a saber, 1, -1, 1/2, -1/2, 3, -3, 3/2 e -3/2. Destes, somente os números 1, 1/2 e 3 são realmente raízes da equação, como o leitor poderá verificar por substituição direta.

Demonstração. Seja a/b uma raiz da equação (1). Isto significa que vale a igualdade abaixo, onde a/b foi colocado no lugar de x:

$$(2) \quad c^n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0.$$

Começaremos dando uma demonstração para o caso especial de $n = 3$, por ser mais fácil para o leitor acompanhar. Em seguida faremos uma demonstração análoga para o caso geral.

No caso $n = 3$, a eq. (2) fica sendo

$$c_3\left(\frac{a}{b}\right)^3 + c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1\left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0.$$

Multiplicando por b^3, obtemos

$$(3) \qquad c_3a^3 + c_2a^2b + c_1ab^2 + c_0b^3 = 0.$$

Inicialmente escrevemos eq. (3) na forma

$$c_3a^3 = -c_2a^2b - c_1ab^2 - c_0b^3,$$

ou

$$c_3a^3 = b(-c_2a^2 - c_1ab - c_0b^2).$$

Isto mostra que b é um divisor de c_3a^3. Podemos, a esta altura, aplicar o Teorema 4.2 com b, a e c_3, respectivamente, no lugar de u, v e w. A hipótese do Teorema 4.2, de que u e v não têm fatores primos comuns, está satisfeita, pois a fração a/b é irredutível, de modo que a e b não têm fatores primos comuns. O Teorema 4.2 nos diz então que b é um divisor de c_3. Esta é uma parte da conclusão do Teorema 4.3, porque sendo $n = 3$, c_n é c_3.

Em seguida, escrevemos a eq. (3) na forma

$$c_0b^3 = -c_1ab^2 - c_2a^2b - c_3a^3,$$

ou

$$c_0b^3 = a(-c_1b^2 - c_2ab - c_3a^2).$$

Isto mostra que a é um divisor de c_0b^3. Usando um argumento praticamente idêntico ao anterior, isto é, aplicando novamente o Teorema 4.2, podemos concluir que a é um divisor de c_0 e isto completa a demonstração para o caso $n = 3$.

Para demonstrar o teorema para um n qualquer, retornemos à eq. (2) e multipliquemos ambos os membros por b^n, obtendo

$$(4) \qquad c_na^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + c_2a^2b^{n-2} + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0.$$

(4) pode ser reescrita como

$$c_na^n = -c_{n-1}a^{n-1}b - \ldots - c_2a^2b^{n-2} - c_1ab^{n-1} - c_0b^n,$$

ou

$$c_na^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - \ldots - c_2a^2b^{n-3} - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}).$$

Isto mostra que b é um divisor de c_na^n. Aplicando o Teorema 4.2, com b, a e c_n, respectivamente, no lugar de u, v e w, concluímos que b é um divisor de c_n.

Reescrevemos, em seguida, a eq. (4) como

$$c_0b^n = a(-c_na^{n-1} - \ldots - c_2ab^{n-2} - c_1b^{n-1}).$$

Isto mostra que a é um divisor de c_0b^n. Novamente, aplicando o Teorema 4.2, com a, b e c_0, respectivamente, no lugar de u, v e w, concluímos que a é um divisor de c_0. Isto completa a demonstração do Teorema 4.3.

Poderíamos ter evitado o argumento do último parágrafo, observando que existe uma simetria na eq. (4) e que o papel de b em relação a c_n, nesta equação, é igual ao de a em relação a c_0.

Examinemos a situação que ocorre quando $c_n = 1$.

Corolário 1. *Consideremos uma equação da forma*

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros. Se esta equação possuir uma raiz racional, ela será um inteiro; além do mais, esta raiz inteira será um divisor de c_0.

Demonstração. Consideremos uma raiz racional a/b. Podemos supor que b seja um inteiro positivo, porque se b fosse negativo poderíamos absorver o sinal menos em a. De acordo com o Teorema 4.3, b terá que ser um divisor de c_n; isto é, b terá que ser um divisor de 1. Mas, +1 e -1 são os únicos divisores de 1, logo, devemos ter $b = +1$, pois excluímos valores negativos para b. Conseqüentemente, qualquer raiz racional será da forma $a/1$ e portanto será um inteiro a. Ainda pelo Teorema 4.3, sabemos que a será um divisor de c_0 e isto completa a demonstração do corolário.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt{7}$ é irracional.

Solução. $\sqrt{7}$ é uma raiz de $x^2 - 7 = 0$. Aqui, de acordo com nossa notação, $c_2 = 1$ e $c_0 = -7$.

Existem agora dois caminhos. Um deles é usar o Corolário 1 e dizer: se $x^2 - 7 = 0$ tiver uma raiz racional a/b, então esta raiz terá que ser um inteiro. Podemos mostrar que $\sqrt{7}$ não é um inteiro, portanto não será uma raiz racional de $x^2-7=0$. Assim, $\sqrt{7}$ deverá ser uma raiz irracional. Obviamente $\sqrt{7}$ não é um inteiro, pois está entre dois inteiros consecutivos 2 e 3; isto, por sua vez, decorre das desigualdades

$$4 < 7 < 9,$$
$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9},$$
$$2 < \sqrt{7} < 3.$$

Um outro caminho faz uso do Corolário 1 na sua forma completa, dizendo que qualquer raiz racional de $x^2 - 7 = 0$ é um inteiro, divisor exato de -7. Os únicos divisores de -7 são 1, -1, 7 e -7. Mas nenhum destes é uma raiz, como pode ser verificado diretamente; as igualdades

$$1^2-7 = 0, \quad (-1)^2-7 = 0, \quad 7^2-7 = 0 \quad \text{e} \quad (-7)^2-7 = 0$$

são todas falsas. Portanto $x^2 - 7 = 0$ não tem raiz inteira, logo não tem raiz racional, de modo que $\sqrt{7}$ é um número irracional.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

Solução. $\sqrt[3]{5}$ é uma raiz de $x^3 - 5 = 0$. De acordo com o Corolário 1, se esta equação tivesse uma raiz racional, ela seria um inteiro, divisor de 5. Os divisores de 5 são $+1$, -1, $+5$ e -5. Mas nenhum destes é uma raiz, pois as igualdades

$$1^3-5 = 0, \quad (-1)^3-5 = 0, \quad 5^3-5 = 0 \quad \text{e} \quad (-5)^3-5 = 0$$

são todas falsas. Portanto $x^3 - 5 = 0$ não tem raízes racionais e daí $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

Estes dois exemplos são casos especiais do seguinte resultado, mais geral:

Corolário 2. *Um número da forma* $\sqrt[n]{a}$, *onde* a *e* n *são inteiros positivos, ou é irracional ou é um inteiro; no segundo caso,* a *é uma n-ésima potência de um inteiro.*

Demonstração. O resultado decorre do Corolário 1, porque $\sqrt[n]{a}$ é uma raiz de $x^n - a = 0$, e se esta equação tiver uma raiz racional, ela terá que ser um inteiro. Além do mais, se $\sqrt[n]{a}$ for um inteiro, digamos k, então $a = k^n$.

Problemas - Lista 13

1. Demonstre que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ e $\sqrt[5]{91}$ são irracionais.
2. Demonstre que $(4\sqrt{13} - 3)/6$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt{15}$ é irracional.

4. Demonstre que $4/(16 - 3\sqrt{15})$ é irracional.
5. Demonstre que $\sqrt[3]{6}$ é irracional.
6. Demonstre que $(1/3)(2\sqrt[3]{6} + 7)$ é irracional.
7. Demonstre que o Teorema 4.3 se transforma numa proposição falsa se omitirmos as palavras "onde a/b é uma fração irredutível".

4.4 EXEMPLOS ADICIONAIS

No Capítulo 3 demonstramos que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional, usando um método aplicável a uma classe bastante ampla de números. No entanto, uma classe ainda mais ampla pode ser tratada com ajuda do Corolário 1.

Examinemos, novamente, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Se escrevermos $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, teremos

$$x - \sqrt{2} = \sqrt{3}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3,$$

e rearranjando os termos, temos

$$x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}.$$

Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2,$$

ou

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \tag{5}$$

A maneira como a eq. (5) foi construída mostra que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é uma de suas raízes. Apliquemos, a seguir, o Corolário 1, para mostrar que a eq. (5) não possui raízes racionais e poderemos, então, concluir que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

A aplicação do Corolário 1 à eq. (5) nos diz que se esta equação tivesse raízes racionais, estas deveriam ser inteiros, divisores de 1. Mas os únicos divisores de 1 são $+1$ e -1, nenhum dos quais é uma raiz de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Concluímos assim que a eq. (5) não possui raízes racionais e que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.

Uma outra maneira de se chegar à mesma conclusão é a seguinte: ao invés de testar se $+1$ e -1 são raízes da eq. (5), podemos argumentar que mesmo se $+1$ ou -1 ou ambos, fossem raízes da eq. (5), pode-se observar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é diferente de $+1$ e de -1; por exemplo, podemos argumentar que tanto $\sqrt{2}$ como $\sqrt{3}$ são maiores do que 1, de modo que sua soma é grande demais para ser 1 ou -1. Portanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ não está entre as possíveis raízes racionais da eq. (5), independentemente do fato de 1 ou -1 serem raízes. Segue-se que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional.

Exemplo. Demonstre que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional.

Solução. Escrevendo $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, vemos que

$$x + \sqrt{3} = \sqrt[3]{2}.$$

Elevando ambos os membros ao cubo, obtemos

$$x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3} = 2.$$

Quando os termos são reagrupados,

$$x^3 + 9x - 2 = -3\sqrt{3}(x^2 + 1).$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$x^6 + 18x^4 - 4x^3 + 81x^2 - 36x + 4 = 27(x^4 + 2x^2 + 1),$$

ou

$$x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 27x^2 - 36x - 23 = 0.$$

Esta equação foi construída de modo que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ fosse uma de suas raízes. Mas as únicas possíveis raízes racionais desta equação são inteiros, divisores de -23. Portanto as únicas possíveis raízes racionais são $+1$, -1, $+23$ e -23, e estes não são raízes, como se pode ver através de uma substituição direta:

$+1$: $1^6 - 9(1)^4 - 4(1)^3 + 23(1)^2 - 36(1) - 23 = 0$ (Falso!)

-1: $(-1)^6 - 9(-1)^4 - 4(-1)^3 + 27(-1)^2 - 36(-1) - 23 = 0$ (Falso!)

23: $(23)^6 - 9(23)^4 - 4(23)^3 + 27(23)^2 - 36(23) - 23 = 0$

(Falso, porque, por exemplo, $(23)^6$ é grande demais para ser anulado pelos outros termos!)

-23: $(-23)^6 - 9(-23)^4 - 4(-23)^3 + 27(-23)^2 - 36(-23) - 23 = 0$ (Falso!)

Portanto não existem raízes racionais e, daí $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional.

Como no exemplo anterior, não é necessário testar se +1, -1, +23 e -23 são raízes da equação. Em seu lugar, podemos argumentar que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é diferente de qualquer uma destas possíveis raízes racionais. Observemos que $\sqrt[3]{2}$ está na vizinhança de 1,2 e $\sqrt{3}$, na vizinhança de 1,7. Conseqüentemente, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é aproximadamente 0,5 e, portanto, não é igual a nenhum dos valores +1, -1, +23 ou -23. Segue-se que $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ é irracional, por ser diferente de todas as possíveis raízes racionais.

Problemas - Lista 14

1. Demonstre que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ é irracional.
2. Demonstre que $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ é irracional.
3. Demonstre que $\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$ é irracional.

4.5 UM RESUMO

Neste capítulo tratamos das chamadas "irracionalidades algébricas". Vimos que existe uma infinidade de números irracionais e estudamos meios de construir alguns deles a partir de um número irracional dado.

Encontramos, também, o seguinte método para testar se um dado número k é irracional:

Inicialmente procuramos uma equação polinomial

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

satisfeita pelo valor $x = k$. (Se não conseguirmos encontrar uma tal equação, não poderemos aplicar este método.)

Em seguida, aplicamos o Teorema 4.3, ou, se $c_n = 1$, o Corolário 1. Muitas vezes é evidente que a equação não possui nenhuma raiz racional. Então, obviamente, k é uma raiz irracional. Outras vezes, de relance, vemos que o número k é diferente de todas as possíveis raízes racionais da equação e, assim, podemos concluir ser k irracional. Ou então, por substituição direta, selecionamos, dentre todos os possíveis candidatos, aqueles números racionais que realmente são raízes da equação. Depois, para provar que o número k é irracional, basta mostrar que ele é diferente de todas as raízes racionais.

No próximo capítulo vamos usar os métodos aqui desenvolvidos para demonstrar que muitos números trigonométricos são irracionais e usaremos o Teorema Fundamental da Aritmética para demonstrar que muitos números logarítmicos são irracionais. Além do mais, veremos que existem números irracionais que não são raízes de equações algébricas.