

1ª Prova de Fundamentos de Análise - 04/09/2023

Essa prova é composta de duas partes:

Parte 1: Entregue 4 questões resolvidas até às 17h30. Faça apenas duas questões de cada seção abaixo.

Parte 2: Envie a resolução de todas as questões até às 24h de sexta-feira, 08/09, para o endereço:
fundamentos.analise.ufpr@gmail.com

Números Naturais e Inteiros

- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, tais que $a \leq b$ e $c \leq d$.
 - Mostre, por indução, que $ac \leq bc$;
 - Usando o resultado provado no item a., mostre que $ac \leq bd$.
- Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Usando apenas os axiomas de Peano e as definições de adição e multiplicação de números naturais mostre que
 - Se $a + b = 0$, prove que $a = 0$ e $b = 0$.
 - Se $a \cdot b = 0$, prove que $a = 0$ ou $b = 0$;
- Defina a relação de ordem " \leq " no conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros e use esta definição para provar que esta relação de ordem é compatível com a adição e a multiplicação usual de \mathbb{Z} . Ou seja, que se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m \leq n$ então
 - $m + p \leq n + p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$;
 - $mp \leq np$, para todo $p \in \mathbb{Z}_+$;

Números Racionais e Irracionais

- Faça o que se pede:
 - Dados $a = 2,12310101010\dots$ e $b = -1,67001001001\dots$, escreva a representação decimal de $a+b$. Justifique todos os seus argumentos.
 - Defina número irracional e use sua definição para construir um número irracional α tal que $1,00001 < \alpha < 1,00002$;
- Faça o que se pede:
 - Seja r um número racional cuja a representação decimal possui apenas uma quantidade finita de casas decimais. Prove que este número pode ser escrito na forma a/b , sendo b um número inteiro positivo cuja decomposição em fatores primos possui apenas os fatores 2 e 5.
 - Enuncie precisamente a recíproca do resultado acima e a demonstre.
- Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Mostre que:
 - $a + b\sqrt{2}$ é um número irracional;
 - $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
 - Defina uma adição e uma multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ que torne este conjunto fechado em relação a estas duas operações.