MATRIZES

Definição

Conjunto de números reais (ou complexos) dispostos em forma de tabela, isto é, distribuídos em m linhas e n colunas, sendo m e n números naturais não nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notação: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ com $i = 1,2,...,m$ e $j = 1,2,...,n$

a_{ij} - elemento genérico da matriz A

i - índice que representa a linha do elemento a_{ij}

j - índice que representa a coluna do elemento a_{ij}

$m \times n$ - ordem da matriz. Lê-se "m por n".

Representações: $A = (\ )$ $A = [\ ]$ $A = \|\ \|$

Exemplos:

1) A representação de um tabuleiro de xadrez pode ser feita por meio de uma matriz 8×8.

2) A matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ onde $a_{ij} = i^2 + j$ é $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3) A matriz abaixo fornece (em milhas) as distâncias aéreas entre as cidades indicadas:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{cidade A} & \text{cidade B} & \text{cidade C} & \text{cidade D} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{cidade A} \\ \text{cidade B} \\ \text{cidade C} \\ \text{cidade D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 638 & 1244 & 957 \\ 638 & 0 & 3572 & 2704 \\ 1244 & 3572 & 0 & 1036 \\ 957 & 2704 & 1036 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta é uma matriz 4×4 (quatro por quatro).

4) A matriz abaixo representa a produção (em unidades) de uma confecção de roupa feminina distribuída nas três lojas encarregadas da venda.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{shorts} & \text{blusas} & \text{saias} & \text{jeans} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{loja I} \\ \text{loja II} \\ \text{loja III} \end{array} & \begin{pmatrix} 50 & 80 & 25 & 40 \\ 70 & 100 & 0 & 60 \\ 30 & 120 & 70 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta é uma matriz 3×4 (três por quatro) pois seus elementos estão dispostos em 3 linhas e 4 colunas.

Igualdade

Duas matrizes de mesma ordem $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij}=b_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Matrizes Especiais

1. Matriz **Linha**

Uma matriz *A* é denominada matriz linha quando possuir uma única linha.

Notação: $A=(a_{ij})_{1\times n}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}-8 & 3 & 4\end{pmatrix}_{1\times 3}$

2. Matriz **Coluna**

Uma matriz *A* é denominada matriz coluna quando possuir uma só coluna.

Notação: $A=(a_{ij})_{m\times 1}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. Matriz **Nula**

Uma matriz *A* é denominada matriz nula quando todos os seus elementos forem nulos, isto é, $a_{ij}=0$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Notação: $\mathbf{0}_{m\times n}$

Exemplo: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 3}$

4. Matriz **Quadrada**

Uma matriz *A* é uma matriz quadrada quando possuir o mesmo número de linhas e de colunas, isto é, $m=n$.

Notação: $A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\... & ... & ... & ...\\a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}$

Diagonal Principal: são os elementos da matriz *A* onde $i=j$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Diagonal Secundária: são os elementos da matriz *A* onde $i+j=n+1$ para todo $i,j=1,2,...,n$.

Traço: é o somatório dos elementos da diagonal principal da matriz *A*, denotado por *trA*.

$$trA=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$$

Exemplo: $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 7 & 0\\10 & -1 & 9\end{pmatrix}_{3\times 3}$

Elementos da diagonal principal: 2, 7 e 9.
Elementos da diagonal secundária: 4, 7 e 10.
$trA=2+7+9=18$

5. Matriz **Diagonal**

Uma matriz quadrada A é chamada de matriz diagonal quando todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

6. Matriz **Identidade**

Uma matriz diagonal A é chamada de matriz identidade quando os elementos da diagonal principal forem todos iguais a um.

Notação: I_n

Exemplo: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

7. Matriz **Triangular Superior**

Uma matriz quadrada A é uma matriz triangular superior quando os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{4\times 4}$

8. Matriz **Triangular Inferior**

Uma matriz quadrada A é chamada de matriz triangular inferior quando os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ para todo $i, j = 1,2,...,n$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

Operações com Matrizes

1. Adição

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem, define-se a matriz soma $C = A + B$ tal que $C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $i = 1,2,...,m$ e para todo $j = 1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 2,5 \\ -4 & 0,5 & 5 \end{pmatrix}$.

Então $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-7 & -1+2,5 \\ 5-4 & 3+0,5 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1,5 \\ 1 & 3,5 & 9 \end{pmatrix}$.

2) Um laboratório farmacêutico produz um certo medicamento. Os custos relativos à compra e transporte de quantidades específicas da substância necessárias para a sua elaboração, adquiridas em dois fornecedores distintos são dados (em reais) respectivamente pelas seguintes matrizes.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{preço compra} & \text{custo transporte}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{substância A}\\ \text{substância B}\\ \text{substância C}\end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 12 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{preço compra} & \text{custo transporte}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{substância A}\\ \text{substância B}\\ \text{substância C}\end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fornecedor 1 Fornecedor 2

A matriz que representa os custos totais de compra e de transporte de cada uma das substâncias A, B e C é dada por:

$$\begin{pmatrix} 9 & 23 \\ 21 & 17 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Operação de Adição

A1. **Associativa**: para quaisquer matrizes A, B e C de mesma ordem, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

A2. **Comutativa**: para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $A+B=B+A$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m \times n$, $A+B=C$ e $B+A=D$.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij}$ para todo $i = 1,...,m$ e para todo $j = 1,...,n$.

Assim, $C = D$.

Logo, a operação de adição é comutativa.

A3. **Elemento Neutro**: para toda matriz A, $A + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{0}_{m\times n} + A = A$.

A4. **Elemento Simétrico**:para toda matriz A de ordem $m \times n$ existe uma matriz S de mesma ordem tal que $A + S = S + A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tem-se $S = (s_{ij})_{m\times n} = -(a_{ij})_{m\times n}$.

Notação: $S = -A$

Assim, $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Além disso, $A + (-B) = A - B$.

A5. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem, $tr(A+B) = trA + trB$.

Dem: Considere as matrizes de ordem n.

$$tr(A+B) = (a_{11} + b_{11}) + ... + (a_{nn} + b_{nn}) = (a_{11} + ... + a_{nn}) + (b_{11} + ... + b_{nn}) = tr(A) + tr(B)$$

2. Multiplicação por Escalar

Sejam $A=(a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz e $k\in\mathbf{R}$ um escalar, define-se a matriz produto por escalar $B=k\cdot A$ tal que $B=(b_{ij})_{m\times n}$ e $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\\ -1 & 7\end{pmatrix}$ e $k=-3$.

Então $(-3)\cdot A=\begin{pmatrix}(-3).1 & (-3).0\\ (-3).3 & (-3).(-5)\\ (-3).(-1) & (-3).7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -9 & 15\\ 3 & -21\end{pmatrix}$

2) O quadro abaixo mostra a produção de trigo, cevada, milho e arroz em três regiões, em uma determinada época do ano.

	TRIGO	CEVADA	MILHO	ARROZ
REGIÃO I	1200	800	500	700
REGIÃO II	600	300	700	900
REGIÃO III	1000	1100	200	450

Com os incentivos oferecidos, estima-se que a safra no mesmo período do próximo ano seja duplicada. A matriz que representa a estimativa de produção para o próximo ano é:

$$\begin{pmatrix}2400 & 1600 & 1000 & 1400\\ 1200 & 600 & 1400 & 1800\\ 2000 & 2200 & 400 & 900\end{pmatrix}$$

Propriedades da Operação de Multiplicação por Escalar

E1. Para toda matriz A e para quaisquer escalares $k_1,k_2\in\mathbf{R}$, $(k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$.

E2. Para toda matriz A e para quaisquer escalares $k_1,k_2\in\mathbf{R}$, $(k_1\cdot k_2)\cdot A=k_1\cdot(k_2\cdot A)$.

E3. Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e para qualquer escalar $k\in\mathbf{R}$, $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m\times n$, $k\cdot(A+B)=k\cdot C=D$ e $k\cdot A+k\cdot B=E+F=G$.

$d_{ij}=k\cdot c_{ij}=k\cdot(a_{ij}+b_{ij})=k\cdot a_{ij}+k\cdot b_{ij}=e_{ij}+f_{ij}=g_{ij}$, para todo $i=1,...,m$ e para todo $j=1,...,n$.

Assim, $D=G$.

Logo, vale a propriedade.

E4. Para toda matriz A de ordem $m\times n$, $0\cdot A=\mathbf{0}_{m\times n}$.

E5. Para toda matriz A de ordem $m\times n$, $1\cdot A=A$.

E6. Para toda matriz quadrada A e para todo $k\in\mathbf{R}, tr(k\cdot A)=k\cdot trA$.

3. Multiplicação

Sejam as matrizes $A=(a_{ij})_{m\times p}$ e $B=(b_{ij})_{p\times n}$, define-se a matriz produto $C=A\cdot B$ tal que $C=(c_{ij})_{m\times n}$ e $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}$, isto é, $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{ip}\cdot b_{pj}$ para todo $i=1,2,...,m$ e para todo $j=1,2,...,n$.

Exemplos:

1) Sejam $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Então $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1.2+0.1 & 1.3+0.0 & 1.1+0.(-1) \\ 2.2+1.1 & 2.3+1.0 & 2.1+1.(-1) \\ (-1).2+4.1 & (-1).3+4.0 & (-1).1+4.(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

Observe que $A=(a_{ij})_{3\times 2}$, $B=(b_{ij})_{2\times 3}$ e $C=(c_{ij})_{3\times 3}$.

2) A matriz abaixo nos fornece as quantidades de vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{alimento I} \\ \text{alimento II} \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ao serem ingeridas 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II a quantidade consumida de cada tipo de vitamina é dada por:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 4+2\cdot 5 & 5\cdot 3+2\cdot 0 & 5\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Serão consumidas 30 unidades de vitamina A, 15 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C.

Propriedades da Operação de Multiplicação

M1. **Associativa**: para quaisquer matrizes *A, B* e *C* de ordens $m\times p$, $p\times l$ e $l\times n$, respectivamente, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Dem.: Considere $(A\cdot B)\cdot C=D\cdot C=E$ e $A\cdot(B\cdot C)=A\cdot F=G$.

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^{l} d_{ik}\cdot c_{kj}=\sum_{k=1}^{l}(\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot b_{tk})\cdot c_{kj}= \\ &=(a_{i1}b_{11}+...+a_{ip}b_{p1})c_{1j}+(a_{i1}b_{12}+...+a_{ip}b_{p2})c_{2j}+...+(a_{i1}b_{1l}+...+a_{ip}b_{pl})c_{lj} \\ &=a_{i1}b_{11}c_{1j}+...+a_{ip}b_{p1}c_{1j}+a_{i1}b_{12}c_{2j}+...+a_{ip}b_{p2}c_{2j}+...+a_{i1}b_{1l}c_{lj}+...+a_{ip}b_{pl}c_{lj} \\ &=a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+...+b_{1l}c_{lj})+...+a_{ip}(b_{p1}c_{1j}+b_{p2}c_{2j}+...+b_{pl}c_{lj}) \\ &=\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot(\sum_{k=1}^{l} b_{tk}\cdot c_{kj})=\sum_{t=1}^{p} a_{it}\cdot f_{tj}=g_{ij} \end{aligned}$$

para todo $i=1,...,m$ e para todo $j=1,...,n$.

Assim, $E=G$.

Logo, vale a propriedade associativa para multiplicação de matrizes.

M2. **Distributiva da Multiplicação em relação à Adição**: para quaisquer matrizes A e B de ordem $m \times p$, para toda matriz C de ordem $p \times n$ e para toda matriz D de ordem $l \times m$, $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ e $D\cdot(A+B) = D\cdot A + D\cdot B$.

M3. **Elemento Neutro**: para toda matriz quadrada A de ordem n, $A\cdot I_n = I_n \cdot A = A$

M4. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem, $tr(A\cdot B) = tr(B\cdot A)$.

M5. Para quaisquer matrizes quadradas A e B de mesma ordem e para todo $k \in \mathbf{R}$, $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B)$

M6. Para toda matriz quadrada A de ordem n, $A.\mathbf{0}_{n\times n} = \mathbf{0}_{n\times n}\cdot A = \mathbf{0}_{n\times n}$

Em geral, **não** vale a propriedade comutativa para a operação de multiplicação.
Assim, $A\cdot B \neq B\cdot A$.
Quando $A\cdot B = B\cdot A$, diz-se que A e B são matrizes **comutáveis**, ou ainda que A e B são matrizes que **comutam** entre si.
Por M6, qualquer matriz quadrada comuta com a matriz quadrada nula de mesma ordem.

Exemplos:

1) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 2}$.
$A\cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 2} \neq (d_{ij})_{3\times 3} = D = B\cdot A$.

2) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 1}$.
$A\cdot B = C = (c_{ij})_{2\times 1}$ e a matriz produto $B\cdot A$ não é definida.

3) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = B\cdot A$

4) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Assim, $A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B\cdot A$.
Logo, as matrizes A e B comutam entre si.

Potência de uma Matriz Quadrada de Ordem *n*.

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A\cdot A$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A^k = A\cdot A^{k-1} = A^{k-1}\cdot A$$

Toda matriz quadrada A comuta com qualquer potência natural de A.

Exemplos:

1) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Então $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Sejam o polinômio $f(x) = x^2 + 2x - 11$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Determinando o valor $f(A)$:

$f(x) = x^2 + 2x - 11 = x^2 + 2x^1 - 11x^0$

$f(A) = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot A^0 = A^2 + 2 \cdot A^1 - 11 \cdot I_2$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma raiz do polinômio, já que $f(A) = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

Matriz Idempotente

Uma matriz quadrada A é idempotente quando $A^2 = A$.

Exemplo: A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ é idempotente. (Verifique!)

4. Transposição

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, define-se a matriz transposta B tal que $B = (b_{ij})_{n\times m}$ e $b_{ij} = a_{ji}$, isto é, é a matriz obtida a partir da matriz A pela troca de suas linhas pelas colunas correspondentes.

Notação: $B = A^t$

Propriedades da Operação de Transposição

T1. **Involução**: para toda matriz A, $(A^t)^t = A$.

T2. Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

Dem.: Considere matrizes de ordem $m \times n$, $(A+B)^t = C^t = D$ e $A^t + B^t = E + F = G$.

$d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = e_{ij} + f_{ij} = g_{ij}$ para todo $i = 1,\ldots,m$ e para todo $j = 1,\ldots,n$.

Assim, $D = G$.

T3. Para toda matriz A e para todo escalar $k \in \mathbf{R}$, $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.

T4. Para toda matriz A de ordem $m \times p$ e para toda matriz B de ordem $p \times n$, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

T5. Para toda matriz quadrada A, $tr(A^t) = trA$.

Classificação de Matrizes Quadradas

1. Matriz **Simétrica**

Uma matriz quadrada A é denominada simétrica quando $A^t = A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Os elementos da matriz dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

2. Matriz **Anti-simétrica**

Uma matriz quadrada A é denominada anti-simétrica quando $A^t = -A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

Todos os elementos da diagonal principal são iguais a zero e os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal têm sinais contrários.

3. Matriz **Invertível** ou **Não-singular**

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível se existir uma matriz quadrada B de mesma ordem tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. A matriz B é dita matriz inversa da matriz A.

Notação: $B = A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplos:

1) A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é invertível e sua inversa é $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ pois:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Obtendo a matriz inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Considere $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$

Se $A \cdot B = I_n$ então $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - t \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Assim, $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 0 \\ 2z - t = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Desta forma, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Verifica-se também que $B \cdot A = I_n$.

Então a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) A matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ não possui inversa.

Propriedades das Matrizes Invertíveis

I1. **Involução**: $(A^{-1})^{-1} = A$.

I2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

dem.: $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A \cdot (B \cdot B^{-1})) \cdot A^{-1} = (A \cdot I_n) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$.

Analogamente, $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = (B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A)) \cdot B = (B^{-1} \cdot I_n) \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$.

Logo, o produto é invertível.

I3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Semelhança de Matrizes

Duas matrizes $A, B \in Mat_n(\mathbf{R})$ são **semelhantes** quando existe uma matriz invertível $P \in Mat_n(\mathbf{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Exemplo: As matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ são semelhantes.

Considere $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Assim, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Matriz **Ortogonal**

Uma matriz quadrada A de ordem n invertível é denominada ortogonal quando $A^{-1} = A^t$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. Matriz **Normal**

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita normal quando comuta com sua matriz transposta, isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Operações Elementares

São operações realizadas nas linhas de uma matriz. São consideradas operações elementares:

OE1. A troca da linha i pela linha j.

$$\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$$

OE2. A multiplicação da linha i por um escalar $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

$$\mathrm{L}_i \leftarrow k \cdot \mathrm{L}_i$$

OE3. A substituição da linha i por ela mesma mais k vezes a linha j, com $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + k \cdot \mathrm{L}_j$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + (-1)\mathrm{L}_1 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz Equivalente por Linha

Sejam A e B matrizes de mesma ordem. A matriz B é denominada equivalente por linha a matriz A, quando for possível transformar a matriz A na matriz B através de um número finito de operações elementares sobre as linhas da matriz A.

Exemplo: A matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ é equivalente a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pois usando somente operações elementares nas linhas da primeira matriz foi possível transformá-la na segunda.

Matriz na Forma Escalonada

Uma matriz está na forma escalonada quando o número de zeros, que precede o primeiro elemento não nulo de uma linha, aumenta linha a linha. As linhas nulas, se existirem, aparecem abaixo das não nulas.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Escalonamento por Linha de uma Matriz
Dada uma matriz qualquer, é possível obter uma matriz equivalente por linhas a esta matriz na forma escalonada:

Exemplos:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-4)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-7)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow (-\tfrac{1}{6})L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-2)L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + (-5)L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A escolha de operações em um escalonamento não é única. O importante é observar que o objetivo é aumentar o número de zeros, que precede o primeiro elemento não nulo de cada linha, linha a linha.

Posto de uma Matriz
O posto de uma matriz A pode ser obtido escalonando-se a matriz A. O número de linhas não nulas após o escalonamento é o posto da matriz A.
Notação: P_A

Exemplo: Nos dois exemplos anteriores o posto das matrizes é igual a dois.

Aplicações de Operações Elementares

1. Cálculo da Inversa de uma Matriz Quadrada A de ordem n.

Passo 1: Construir a matriz $(A \mid I_n)$ de ordem $n \times 2n$.

Passo 2: Utilizar operações elementares nas linhas da matriz $(A \mid I_n)$ de forma a transformar o bloco A na matriz identidade I_n.
Caso seja possível, o bloco I_n terá sido transformado na matriz A^{-1}.
Se não for possível transformar A em I_n é porque a matriz A não é invertível.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-3)L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (-1)L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow (-1)L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow (-1)L_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Justificativa do Método para o Cálculo da Matriz Inversa

Teorema: Uma matriz quadrada *A* de ordem *n* é invertível se e somente se a matriz *A* é equivalente por linha a matriz I_n.

Desta forma, a seqüência de operações elementares que reduz a matriz *A* na matriz I_n, transforma a matriz I_n na matriz A^{-1}.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A redução da matriz *A* à matriz identidade é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3}\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + (-2)\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando em I_n a mesma seqüência de operações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{3}\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + (-2)\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz *A*.

2. Cálculo do Determinante

A qualquer matriz quadrada A podemos associar um certo número real denominado **determinante** da matriz.

Notação: $\det A$ ou $|A|$

É importante observar que:

a) Quando trocamos duas linhas de uma matriz A, seu determinante troca de sinal.

b) O determinante da matriz fica multiplicado pelo escalar não nulo k quando todos os elementos de uma certa linha forem multiplicados por k.

c) O determinante não se altera quando utilizamos a operação elementar do tipo $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + k \cdot \mathrm{L}_j$. (Teorema de Jacobi).

d) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada, utilizando-se operações elementares nas linhas da matriz, consiste em encontrar uma matriz triangular equivalente por linha à matriz dada, respeitando-se as propriedades de determinantes acima.

Exemplos:

1) $$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$(-3)\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{pmatrix} = (-3)\cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

2) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} =$$

$$(-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix} = (-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = (-2)\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 45 = -90$$

Outras informações sobre este tópico encontram-se no Apêndice A.

3. Resolução de Sistemas

Outra aplicação de operações elementares é na resolução de sistemas, que será visto com detalhes no próximo capítulo.

Exercícios

1) Resolva a equação matricial $\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, indicando os valores para *a*, *b*, *c* e *d*.

2) Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ e $k = 4$. Verifique se:

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $k \cdot (B - C) = k \cdot B - k \cdot C$

c) $tr(A + B) = trA + trB$

d) $tr(A \cdot C) = trA \cdot trC$

3) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Indique uma matriz quadrada *B* de ordem 2 não nula tal que $A \cdot B = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

4) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resolva a equação matricial $A \cdot X = I_2$, onde $X = (x_{ij})_{2\times 2}$.

5) Mostre que, em geral, $A^2 - B^2 \neq (A - B) \cdot (A + B)$, sendo *A* e *B* matrizes quadradas de mesma ordem.

6) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre A^n.

7) Verifique que a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ é uma raiz do polinômio $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

8) Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Indique a matriz $A^2 - 2 \cdot A + I_2$

b) A matriz *A* é invertível? Em caso afirmativo, indique $A^{-3} = (A^{-1})^3$.

9) Mostre que as únicas matrizes quadradas de ordem 2 que comutam tanto com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ quanto com a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são múltiplas de I_2.

10) Determine todas as matrizes de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. Verifique a igualdade $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

12) Mostre que se a matriz quadrada A for invertível e $A \cdot B = A \cdot C$ então $B = C$. (Lei do Corte)

13) Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. É possível calcular *X*, na equação $A \cdot X = B$?

14) Sejam *A*, *B*, *C* e *X* matrizes quadradas de mesma ordem e invertíveis. Resolva as equações, considerando X a variável.
a) $A \cdot B \cdot X = C$
b) $C \cdot A \cdot X^t = C$
c) $A \cdot X^2 \cdot C = A \cdot X \cdot B \cdot C$
d) $A \cdot B^{-1} \cdot X = C \cdot A$
e) $A^2 \cdot X^t = A \cdot B \cdot A$

15) Seja A uma matriz de ordem n tal que a matriz $(A^t \cdot A)$ é invertível. A matriz $A \cdot (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t$ é simétrica? E idempotente?

16) Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

17) Determine *a, b* e *c* de modo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

18) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também uma matriz simétrica.

19) Mostre que o mesmo vale para matrizes anti-simétricas.

20) Se A e B são matrizes simétricas que comutam entre si então a matriz $B \cdot A^2$ também é simétrica? Justifique.

21) Toda matriz ortogonal é também uma matriz normal? Justifique.

22) O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal? Justifique.

23) Em uma pesquisa onde foram consideradas 3 marcas de refrigerante, Gelato, Delícia e Suave, o elemento a_{ij} da matriz abaixo indica a possibilidade de uma pessoa que consuma o refrigerante *i* passar a consumir o refrigerante *j*. O elemento da diagonal principal representa a possibilidade de uma pessoa que consuma um determinado refrigerante permaneça consumindo o mesmo refrigerante.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Gelato} \\ \text{Delícia} \\ \text{Suave} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Gelato} & \text{Delícia} & \text{Suave} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Qual a possibilidade de uma pessoa que consumia o refrigerante Gelato passar a consumir o refrigerante Suave? E a de quem consumia Suave passar a consumir Gelato?
b) Escreva a matriz que indica a possibilidade de se mudar de marca após duas pesquisas.

24) Verifique se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ é invertível. Em caso afirmativo, indique a matriz inversa.

25) Para que valores de a a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ admite inversa?

26) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Indique a matriz $(A \mid I_3)$ e determine A^{-1}.

27) Dada a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Indique a matriz A.

28) Determinar o valor de a a fim de que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ seja invertível.

29) Calcule o determinante das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

30) Sabendo que A é uma matriz quadrada de ordem n e que $\det A = 5$, determine:
a) $\det(3 \cdot A)$
b) $\det A^t$
c) $\det(-A)$
d) $\det A^2$

31) Encontre todos os valores de a para os quais $\det\begin{pmatrix} a-1 & 5 \\ 0 & a+3 \end{pmatrix} = 0$.

Respostas

1) $a = 5, b = -3, c = 4, d = 1$

3) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}, t, z \in \mathbf{R}^* \right\}$

4) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8) a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

10) $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \right\}$

13) Sim, $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

14) a) $X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$

b) $X = (A^{-1})^t$

c) $X = B$

d) $X = B \cdot A^{-1} \cdot C \cdot A$

e) $X = (A^{-1} \cdot B \cdot A)^t$

15) Sim. Sim.

17) $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

23) a) 0,1 e 0,6 b) $\begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}15 & 0{,}11 \\ 0{,}58 & 0{,}31 & 0{,}11 \\ 0{,}68 & 0{,}20 & 0{,}12 \end{pmatrix}$

24) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -11 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

25) $a \neq -2$

26) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

28) $a \neq 1$

29) 0 e 24, respectivamente.

30) a) $3^n \cdot 5$

b) 5

c) $\begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ for par} \\ -5 & \text{caso contrário} \end{cases}$

d) 25

31) $a = 1$ ou $a = -3$

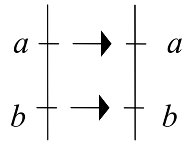
Apêndice A - Determinante

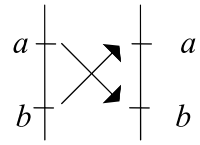
Permutações

Seja um conjunto finito A qualquer, uma **permutação** em A é qualquer função bijetora $f : A \rightarrow A$. Sendo n a cardinalidade do conjunto, existem $n!$ permutações possíveis.

Exemplos:

1) Seja $A = \{a, b\}$ e as bijeções abaixo:





A notação usual é:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nesta notação matricial, a primeira linha indica os elementos originais e a segunda os elementos reorganizados.

2) Seja $A = \{1,2,3\}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ são três das seis permutações possíveis em A.

3) Seja $A = \{a, b, c, d\}$.

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ é uma das 24 permutações possíveis.

Se A for um conjunto munido de uma relação de ordem, as permutações podem ser classificadas como permutações pares e permutações ímpares. Uma permutação é par quando o número de elementos - dentre os elementos reorganizados - "fora de ordem" for par e é ímpar quando este número for ímpar.

Exemplos:

1) Seja $A = \{1,2,3\}$ com a ordem numérica usual, isto é, $1 \leq 2 \leq 3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ são permutações ímpares e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é par.

2) Seja $A = \{a, b, c, d\}$ com a ordem lexicográfica (alfabética) usual.

$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ é uma permutação ímpar.

Além disto, às permutações pares é associado o sinal positivo e às ímpares o sinal negativo.

O Determinante

Dada uma matriz quadrada A de ordem n é possível fazer corresponder um certo número denominado **determinante da matriz A**.

Notação: $\det A \quad |A| \quad \det(a_{ij})_{n\times n}$

Considere, por exemplo, uma matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, e as permutações possíveis no conjunto de índices $\{1, 2, 3\}$.

A partir da permutação ímpar $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ associa-se o produto "$-\,a_{11}a_{23}a_{32}$", tal que os índices linha correspondem a primeira linha da representação da permutação, os índices coluna são obtidos da segunda linha e o sinal negativo da classificação da permutação.

O determinante de uma matriz de ordem 3 é obtido a partir de todas as seis permutações possíveis no conjunto de índices $\{1, 2, 3\}$ classificadas e sinalizadas.

Assim, o determinante é dado por:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

Genericamente, para uma matriz de ordem n, o determinante é o número obtido do somatório dos produtos sinalizados de elementos a_{ij} da matriz, combinados de acordo com as permutações do conjunto de índices $\{1, 2,..., n\}$.

Exemplos:

1) $\det(6) = 6$

2) $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1).7 - 0.2 = -7$

3) $$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= 2.0.0 - 2.4.\frac{1}{2} - 5.(-1).0 + 5.4.0 + (-2).(-1).\frac{1}{2} - (-2).0.0$$
$$= -3$$

Desenvolvimento de Laplace

Seja uma matriz quadrada de ordem *n*,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & ... & ..... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Considere um elemento a_{ij} qualquer, com $i, j = 1,...,n$ e a submatriz A_{ij} de ordem $(n-1)$ obtida a partir da matriz *A* retirando-se a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna. O determinante da submatriz A_{ij} sinalizado por $(-1)^{i+j}$ é denominado o **cofator do elemento** a_{ij}.

Exemplo: Seja a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

O cofator do elemento a_{23}, isto é, de 4 é : $(-1)^{2+3}.\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-1).1 = -1$

O cofator do elemento $a_{31} = 0$ a$_{31}$ é: $(-1)^{3+1}.\det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 1.20 = 20$

Considere uma certa linha *i* fixada. O determinante da matriz *A* fica definido por:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

A expressão é uma fórmula de recorrência (faz uso de determinantes de matrizes de ordem menores) conhecida como **desenvolvimento de Laplace**.

Este desenvolvimento pode ser feito fixando-se uma certa coluna *j* e a expressão passa a ser:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Exemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ fixada a linha 2.

$$\det A = a_{21}(-1)^{2+1} \det A_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} \det A_{22} = 2.(-1)^3.|0| + 7.(-1)^4.|-1| = 2.(-1).0 + 7.1.(-1) = -7$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ fixada a linha 1.

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \det A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} \det A_{13}$$

$$= 2.1.\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} + 5.(-1).\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-2).1.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Fixando ainda a linha 1 para as submatrizes:

$$\det A = 2.1.[0.(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 4.(-1)^{1+2}.\det A_{12}] +$$
$$5.(-1).[(-1).(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 4.(-1)^{1+2}.\det A_{12}] +$$
$$(-2).1.[(-1).(-1)^{1+1}.\det A_{11} + 0.(-1)^{1+2}.\det A_{12}]$$
$$= 2.1.[0.1.|0| + 4.(-1).\left|\frac{1}{2}\right|] + 5.(-1).[(-1).1.|0| + 4.(-1).|0|] + (-2).1.[(-1).1.\left|\frac{1}{2}\right| + 0.(-1).|0|]$$
$$= 2.1.(-2) + 5.(-1).0 + (-2).1.\frac{1}{2} = -4 + 1 = -3$$

Propriedades

Considere A e B matrizes quadradas de ordem n e $k \in \mathbf{R}$ não nulo.

D1. Se A é uma matriz triangular superior (inferior) então $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

dem: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & ..... & .... \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Fixando a coluna 1 para o cálculo dos determinantes,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} = a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\det A_{21} + ... + a_{n1}(-1)^{n+1}\det A_{n1}$$
$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$
$$= a_{11}[a_{22}(-1)^{1+1}\det A_{11} + ... + a_{nn}(-1)^{n-1+1}\det A_{(n-1)1}]$$
$$= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & ... & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & ... & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\sum_{i=1}^{n-2} a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$
$$= a_{11}a_{22}[a_{33}(-1)^{1+1}\det A_{11} + ... + a_{nn}(-1)^{n-2+1}\det A_{(n-2)1}]$$
$$= a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Corolários:

i) $\det \mathbf{0}_n = 0$

ii) $\det I_n = 1$

iii) Se A é uma matriz diagonal então $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

D2. $\det A = 0$, quando A possuir uma linha (ou coluna) nula.

D3. $\det A = 0$, quando A possuir duas linhas (ou colunas) iguais.

D4. $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$

D5. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

D6. $\det A = \det A^t$

D7.Considere a matriz A e B a matriz obtida a partir de A por aplicação de operações elementares:

a) $L_i \leftrightarrow L_j$: $\det B = -\det A$

b) $L_i \leftarrow k.L_i$: $\det B = k \cdot \det A$

dem: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Fixando a linha i para o cálculo dos determinantes,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ obtida pela operação elementar $L_i \leftarrow k.L_i$.

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij})(-1)^{i+j} \det A_{ij} = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} = k \cdot \det A$$

c) $L_i \leftarrow L_i + k.L_j$: $\det B = \det A$

D8. A é uma matriz invertível se e somente se $\det A \neq 0$.

D9. Se A é uma matriz invertível então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

D10. Se A e B são matrizes semelhantes então $\det A = \det B$.

D11. Se A é uma matriz ortogonal então $\det A = \pm 1$.

Exercícios

1) Calcule o determinante usando permutações.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2) Calcule o determinante usando desenvolvimento de Laplace.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Indique o valor de x para que as matrizes sejam invertíveis.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix}$