SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Definição

Dados os números reais $a_1, a_2, ..., a_n, b$, com $n \geq 1$, a equação $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são **variáveis ou incógnitas**, é denominada **equação linear nas variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$. Os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são denominados **coeficientes das variáveis** $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivamente, e b é denominado de **termo independente**.

Um **Sistema Linear sobre R com *m* equações e *n* incógnitas** é um conjunto de $m \geq 1$ equações lineares com $n \geq 1$ variáveis, e é representado por:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Com $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Matrizes Associadas a um Sistema Linear

Sistemas podem ser representados na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Denominadas, **matriz *C* de Coeficientes**, **matriz *X* de Variáveis** e **matriz *B* de Termos Independentes**.

Assim, um sistema linear com *m* equações e *n* incógnitas fica representado pela equação matricial $C \cdot X = B$.

Outra matriz que se pode associar a um sistema linear é a **Matriz Ampliada ou Completa** do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Classificação de Sistemas

Classifica-se um sistema linear de acordo com o tipo de solução.

Uma **solução** para um sistema de equações lineares é uma *n*-upla de números reais $(s_1, s_2, ..., s_n)$ que satisfaz todas as equações, simultaneamente, isto é, substituindo-se a variável x_1 pelo valor s_1, x_2 por s_2, ... e x_n por s_n em cada uma das equações, todas as igualdades são verdadeiras. O **conjunto solução** S do sistema é o conjunto de todas as soluções.

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$, o par ordenado (2,0) é solução deste sistema. Assim, o conjunto solução $S = \{(2,0)\}$.

De forma geral, temos que um dado sistema de equações lineares sobre **R** pode ser classificado como:

- **Sistema Possível** (ou **Compatível** ou **Consistente**)
  - **Determinado (SPD)**: há uma única solução
  - **Indeterminado (SPI)**: há infinitas soluções
- **Sistema Impossível** (ou **Incompatível** ou **Inconsistente**) **(SI)**: não há solução**.**

Resolução de Sistemas utilizando o Método de Eliminação Gaussiana

Dado um sistema de equações lineares, espera-se encontrar sua solução, isto é resolvê-lo. O método de resolução utilizado será o **Método de Eliminação Gaussiana**.

A idéia do método é obter um sistema mais "simples" equivalente ao sistema dado. Dois sistemas de equações lineares são denominados **sistemas equivalentes** quando possuem a mesma solução.

Exemplo: Os sistemas $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ são equivalentes pois ambos possuem o mesmo conjunto solução $S = \{(2,-2)\}$.

O Método de Eliminação Gaussiana

Dado um sistema linear com *m* equações e *n* variáveis:

1. Obter a matriz ampliada.

2. Escalonar a matriz ampliada utilizando operações elementares.

3. Fazer a análise, de acordo com o teorema abaixo:

   Teorema: Um sistema linear de *m* equações e *n* variáveis admite solução se e somente se o posto da matriz ampliada escalonada (P_A) for igual ao posto da matriz de coeficientes (P_C).

   Assim:

   a) Se $P_A = P_C = n$, o sistema é Possível Determinado (SPD).

   b) Se $P_A = P_C < n$, o sistema é Possível Indeterminado (SPI).

   c) Se $P_A \neq P_C$, o sistema é Impossível (SI).

4. Reescrever o sistema, associado a matriz escalonada, equivalente ao sistema dado, e:

   a) Se o sistema for SPD, encontrar o valor de uma variável e, por substituição, determinar as demais variáveis. Indicar o conjunto solução *S*, que neste caso, conterá apenas uma *n*-upla.

b) Se o sistema for SPI, escolher $n - P_A$ variáveis **livres** ou **independentes**. O número, $n - P_A$ também é denominado o **grau de liberdade** ou **grau de indeterminação** do sistema.
As variáveis que dependem das variáveis livres são denominadas variáveis **amarradas** ou **ligadas**.
Indicar o conjunto solução *S*, apresentando todas as ordenadas da *n*-upla em função das variáveis livres.

c) Se o sistema for SI, indicar $S = \varnothing$.

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$ com 3 equações e 3 incógnitas.

A matriz ampliada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Após o escalonamento, a matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

E a matriz de coeficientes é: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Análise: $P_A = P_C = n = 3$.

Logo, o sistema é possível determinado (SPD).

O sistema equivalente é $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Após as substituições, $y = \dfrac{1}{2}$ e $x = 1$.

A solução do sistema é $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^2

O conjunto de pares ordenados de números reais é designado por $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R} \text{ e } y \in \mathbf{R}\}$.
Geometricamente tem-se o plano $\mathbf{R}^2$, descrito por dois eixos - eixo *X* e eixo *Y* - perpendiculares entre si, interceptando-se no ponto $(0,0)$, denominado origem.

Exemplos:

1) Seja o sistema com 2 equações e 2 variáveis: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Aplicando o Método de Eliminação Gaussiana:

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

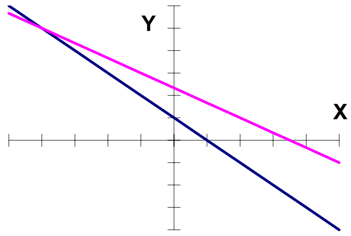
Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = P_C = n = 2$: Sistema Possível Determinado (SPD).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

Substituindo o valor de *y* na primeira equação, tem-se $x = -4$.
Logo a solução do sistema é descrita por $S = \{(-4,5)\}$.

Interpretando geometricamente: cada equação do sistema representa uma reta, estas retas se interceptam em um único ponto $(-4,5)$.



2) Dado o sistema: $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

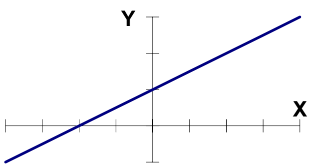
Análise, $P_A = P_C = 1 < n = 2$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 0y = 0 \end{cases}$

A variável *y* está livre, podendo assumir qualquer valor real, e a variável *x* amarrada em função de *y*, isto é, $x = 2y - 2$.

A solução do sistema é $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y - 2\} = \{(2y - 2, y), y \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, tem-se duas retas coincidentes, a equação $2x - 4y = -4$ é múltipla da equação $x - 2y = -2$. Assim, as retas se interceptam em infinitos pontos.



3) Dado o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

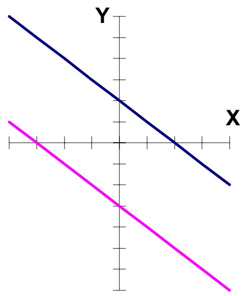
Matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 2 \neq 1 = P_C$: Sistema Impossível.

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y=2 \\ 0y=-5 \end{cases}$, isto é, $\begin{cases} x+y=2 \\ 0=-5 \end{cases}$

A solução é $S = \varnothing$.

Assim, se um sistema possui equações que representam retas paralelas, como no exemplo, uma solução é impossível, pois não há ponto de interseção entre retas paralelas.



Resumindo, para sistemas de equações de duas incógnitas com duas ou mais equações, tem-se o seguinte quadro:

Retas	***Classificação do Sistema***
Concorrentes	Possível e Determinado
Coincidentes	Possível e Indeterminado
Paralelas	Impossível

Resolvendo e Interpretando Geometricamente Sistemas Lineares no R^3

O conjunto de todos as triplas de números reais é designado por $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R} \text{ e } z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente tem-se o espaço $\mathbf{R}^3$, descrito por três eixos, eixo *X*, eixo *Y* e eixo *Z*, que são perpendiculares entre si, interceptando-se no ponto $(0,0,0)$, denominado origem.

Exemplos:

1) Considere o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=2 \\ y+2z=2 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

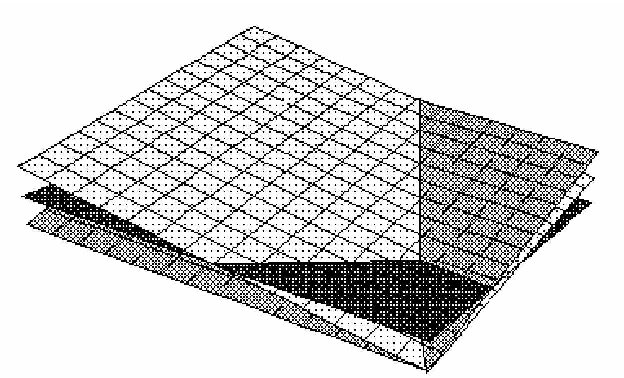
Análise, $P_A = P_C = n = 3$: Sistema Possível Determinado (SPD) .

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ -3z=-2 \end{cases}$

Sendo $z=\dfrac{2}{3}$, fazendo-se as substituições: $y=\dfrac{2}{3}$ e $x=\dfrac{5}{3}$.

A solução do sistema é $S=\left\{\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam no ponto $\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.



2) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ x-z=1 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

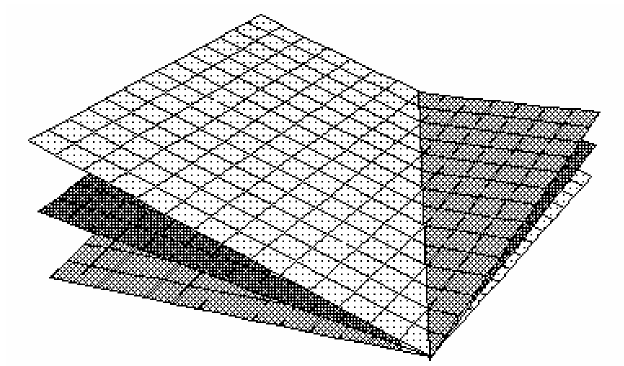
Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=2 \\ 0z=0 \end{cases}$

Pela terceira equação, a variável z está livre, assim a variável y fica em função de z, isto é, $y = 2-2z$. A variável x também fica amarrada a variável z, após as substituições, tem-se que $x = 1+z$. Esta sistema possui grau de liberdade 1.

A solução do sistema é $S = \{(1+z, 2-2z, z), z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam em uma reta.



3) Seja o sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x-2y-z=-3 \\ 2x+4y+2z=6 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

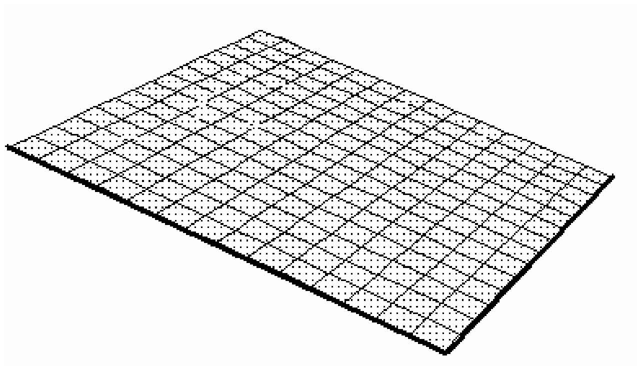
Análise, $P_A = P_C = 1 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 0y=0 \\ 0z=0 \end{cases}$

As variáveis y e z estão livres, o grau de liberdade do sistema é igual a 2, e a variável x está amarrada pela relação $x = 3 - 2y - z$.

A solução do sistema é $S = \{(3-2y-z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$.

Geometricamente, os três planos são coincidentes e, consequentemente, qualquer ponto deste plano é solução para o sistema.



4) Seja o sistema $\begin{cases} x-4y-3z=2 \\ 3x-12y-9z=6 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 3 & -12 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

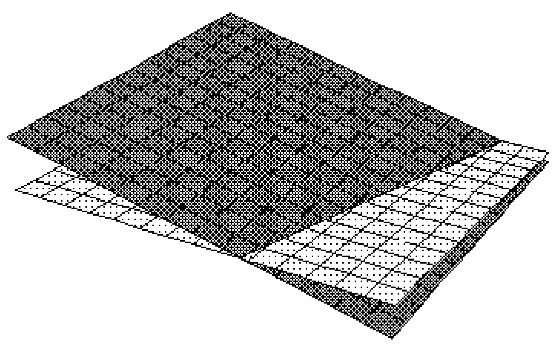
Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x-4y-3z=2 \\ y+\dfrac{4}{5}z=-\dfrac{1}{5} \\ 0z=0 \end{cases}$

A variável z está livre, o grau de liberdade é 1. As variáveis x e y estão ligadas à variável z, e irão assumir valores de acordo as relações $y=\dfrac{-1-4z}{5}$ e $x=\dfrac{6-z}{5}$.

A solução é $S=\left\{\left(\frac{6-z}{5}, \frac{-1-4z}{5}, z\right), z \in \mathbf{R}\right\}$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos coincidentes que interceptam um terceiro. A interseção é uma reta.



5) Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = -10 \\ 2x + y + z = -20 \\ y + z = -40 \end{cases}$

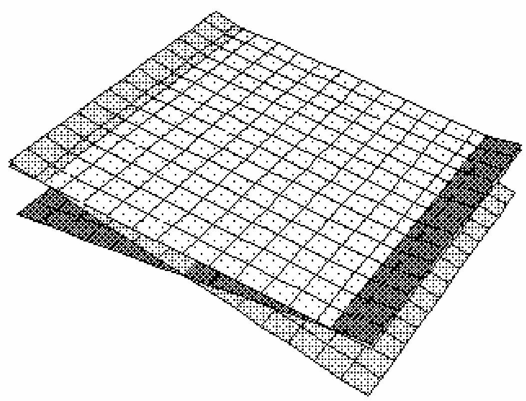
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 2$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y + z = -10 \\ y + z = -40 \\ 0z = -40 \end{cases}$

A terceira equação é equivalente a $0 = -40$, o que é impossível. A solução é $S = \varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa três planos distintos que se interceptam dois a dois, isto é, sem solução comum.



6) Dado o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=20 \\ x+y+z=30 \end{cases}$

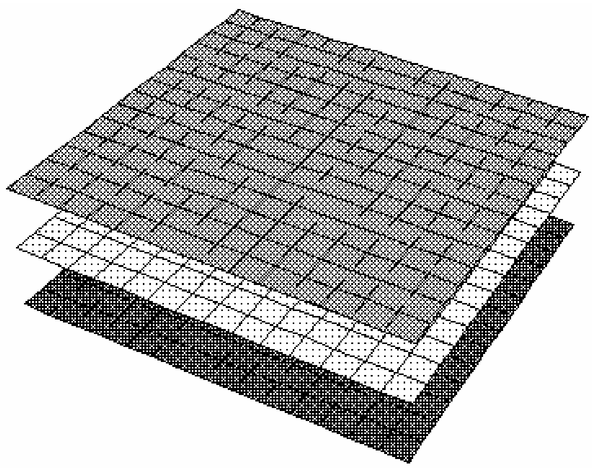
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 1$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=10 \\ 0y=10 \\ 0z=20 \end{cases}$

As duas últimas equações são impossíveis. A solução é $S = \varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa três planos paralelos.



7) Dado o sistema: $\begin{cases} x+3y-5z=-20 \\ 7x-2y+3z=2 \\ 2x+6y-10z=50 \end{cases}$

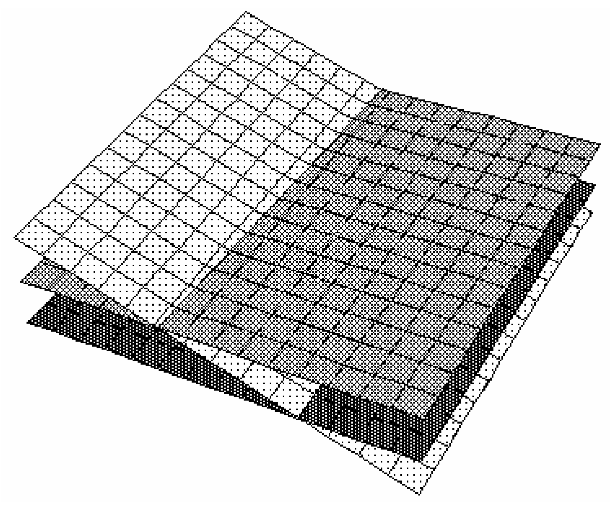
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -20 \\ 7 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -10 & 50 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -20 \\ 0 & -23 & 38 & 142 \\ 0 & 0 & 0 & 90 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -23 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 3 \neq P_C = 2$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x+3y-5z=-20 \\ -23y+38z=142 \\ 0z=90 \end{cases}$

A última equação não possui solução. Assim, a solução do sistema é $S=\varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos paralelos interceptados por um terceiro.



8) Seja o sistema $\begin{cases} 9x + y - 5z = 16 \\ 18x + 2y - 10z = 32 \\ -9x - y + 5z = 4 \end{cases}$

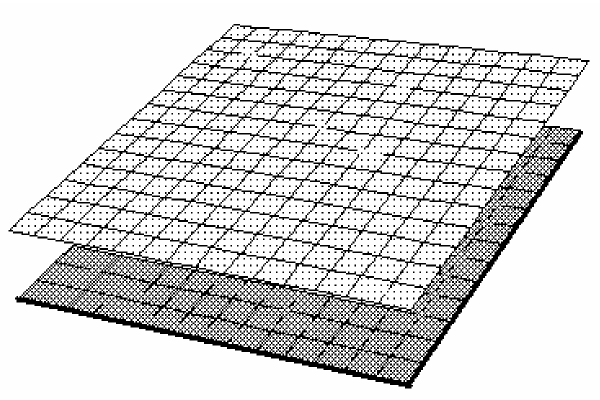
Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 & 16 \\ 18 & 2 & -10 & 32 \\ -9 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = 2 \neq P_C = 1$: Sistema Impossível (SI).

Sistema equivalente $\begin{cases} 9x + y - 5 = 16 \\ 0y = 20 \\ 0z = 0 \end{cases}$

A segunda equação não possui solução. A solução é $S = \varnothing$.

Geometricamente, o sistema representa dois planos coincidentes paralelos a um terceiro.



Sistema Homogêneo

É um sistema de equações lineares onde todos os termos independentes são iguais a zero.

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = 0 \end{cases}$$

A matriz de Termos Independentes B é a matriz nula, assim um sistema homogêneo é sempre possível, já que admite a solução trivial, isto é, $S = \{(0,0,...,0)\}$.

No entanto, um sistema possível pode ainda ser classificado como determinado ou indeterminado. Se o sistema é possível e determinado, a única solução é a trivial. Se o sistema é possível e indeterminado, outras soluções, além da trivial, existem.

Exemplos:

1) Seja o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = P_C = n = 3$: Sistema Possível Determinado (SPD).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$

Este sistema só admite solução trivial. Assim, $S = \{(0,0,0)\}$.

2) Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ 6x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Análise, $P_A = P_C = 2 < n = 3$: Sistema Possível Indeterminado (SPI).

Sistema equivalente $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + \dfrac{4}{3}z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$

A variável *z* está livre e as variáveis *x* e *y* estão amarradas.
A solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{1}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right), z \in \mathbf{R}\right\}$.

Resolução de Sistemas utilizando Inversão de Matrizes

O sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas, com $m = n$, pode ser representado pela equação matricial $C \cdot X = B$, sendo *C* uma matriz quadrada de ordem *n*.
Se a matriz *C* for invertível, isto é, existir a matriz inversa C^{-1}, significa que o sistema é possível e determinado.

$$\begin{gathered} C \cdot X = B \\ C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot B \\ (C^{-1} \cdot C) \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ I_n \cdot X = C^{-1} \cdot B \\ X = C^{-1} \cdot B \end{gathered}$$

Como *X* é uma matriz de ordem $n \times 1$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot B$

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + y - 5z = 2 \end{cases}$

A equação matricial $C \cdot X = B$ é: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A matriz inversa da matriz *C* é $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

Assim, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

A solução do sistema é $S = \{(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

Exercícios

Utilizando o Método de Eliminação Gaussiana:

1) Resolva o sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 4y + 6z = 7 \end{cases}$.

2) Indique a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 4x - y - 4z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$, o posto da matriz ampliada e o posto da matriz de coeficientes.

3) Um fabricante de objetos de cerâmica produz jarras e pratos decorativos. Cada jarra exige 16 minutos de modelagem, 8 minutos de polimento e 30 minutos de pintura. Cada prato decorativo necessita de 12 minutos de modelagem, 6 de polimento e 15 de pintura. Sabendo-se que são reservadas por semana 8 horas para modelagem, 4 horas para polimento e 13 horas para pintura, encontre a quantidade de cada tipo de objeto que deverá ser fabricada por semana, considerando-se a melhor utilização do tempo disponível para cada etapa.

	Jarras	Pratos Decorativos	Minutos Por Semana
Modelagem	16	12	8.60
Polimento	8	6	4.60
Pintura	30	15	13.60

Considerando-se x como sendo a quantidade de jarras a serem produzidas por semana e y a quantidade de pratos decorativos, escreva o sistema de equações lineares que representa o problema e resolva-o.

4) Determine os valores de a de modo que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$ seja:

a) SPD
b) SPI
c) SI

5) Calcule os valores para a e b de modo que o sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ x + by - 6z = 1 \end{cases}$ seja SPI e resolva-o para estes valores.

6) Estabeleça a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que o sistema $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = a \\ 3x + 6y + 3z = b \\ -3x - 4y - z = c \end{cases}$ seja possível.

7) Escreva a condição para que o sistema $\begin{cases} x + 8y - 2z = a \\ 5x + 4y - 2z = b \\ 7x - 16y + 2z = c \end{cases}$ tenha solução.

8) Indique o conjunto solução do sistema homogêneo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + y - z = 0 \end{cases}$.

9) Determine o conjunto solução S do sistema $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ -x + y - z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \end{cases}$

10) Escreva um sistema homogêneo com quatro incógnitas, x, y, z e t, quatro equações e grau de liberdade igual a dois. Resolva-o.

11) Considere o sistema $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 5y - 4z = 2 \\ 3x + 7y - 5z = 3 \end{cases}$. Escreva na forma matricial e calcule a matriz X utilizando a inversão de matrizes.

Respostas

1) Sistema Impossível

2) $S = \{(-\frac{10}{7}, \frac{9}{7}, -2)\}$

3) $x = 18, y = 16$

4) a) $a \neq 2$ e $a \neq -3$
   b) $a = 2$
   c) $a = -3$

5) $a = \frac{11}{7}$ e $b = 2$

6) $2b - 3a = 0$ e c qualquer

7) $3a - 2b + c = 0$

8) $S = \{(0,0,0)\}$

9) $S = \{(-2z, z, z, 2z), z \in \mathbf{R}\}$ ou
   $S = \{(-t, \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t), t \in \mathbf{R}\}$

11) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$