S B A

51º

SEMINÁRIO BRASILEIRO

DE

ANÁLISE

SEPARATAS

Departamento de Matemática - CFM
Florianópolis, 24 - 27 de Maio 2000

Universidade Federal de Santa Catarina

Decaimento de Soluções de uma Equação da Onda com "feedback" não Linear na Fronteira *

José R. Luyo Sánchez luyo@pg.im.ufrj.br

Juan C. Vila Bravo vila@pg.im.ufrj.br

Instituto de Matemática–UFRJ

CEP:21945-970 Rio de Janeiro RJ Brasil

Resumo

Neste artigo estudamos a estabilização de uma equação da onda por meio de um "feedback" não linear dissipativo na fronteira. Consideramos condições de Neumann e Dirichlet na fronteira. Mostraremos sob condições adequadas o decaimento exponencial e polinomial da energia associada ao sistema.

Palavras chaves e frases: Equação da onda, decaimento exponencial, decaimento polinomial

1 Introdução

Seja Ω um conjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira bem regular $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definimos a aplicação $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$m(x) = x - x_0. \tag{1.1}$$

Consideremos a seguinte partição da fronteira:

$$\Gamma_+(x_0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \tag{1.2}$$

$$\Gamma_-(x_0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \tag{1.3}$$

Onde $\nu(x)$ é o vetor unitário normal a Γ em $x \in \Gamma$ na direção exterior a Ω e " $\cdot$ " denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\partial/\partial\nu$ a derivada normal e por "$'$" a derivada

*Financiado parcialmente pelo LNCC (Brasil)

com respecto ao tempo d/dt. Suponhamos que $int\Gamma_-(x_0) \neq \phi$, então Γ_+ e Γ_- tem int[illegible] não vazio em Γ. Como Ω é limitado com fronteira regular Γ, existe uma constante positi[illegible] $\delta > 0$ tal que:

$$m(x) \cdot \nu(x) > \delta^{-1}, \quad \forall x \in \Gamma_+. \tag{1.4}$$

logo, isto implica que $\bar{\Gamma}_+ \cap \bar{\Gamma}_- = \phi$.

Consideremos a seguinte equação da onda:

$$y'' - \Delta y = 0, \quad em \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + \alpha y = -g(y'), \quad sobre \quad \Gamma_+ \times (0, \infty) \tag{1.6}$$

$$y = 0, \quad sobre \quad \Gamma_- \times (0, \infty) \tag{1.7}$$

$$y(0) = y_0 \in V, \quad y'(0) = y_1 \in L^2(\Omega). \tag{1.8}$$

Onde

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega); \quad \phi = 0 \quad sobre \quad \Gamma_-\}, \tag{1.9}$$

$\alpha \in L^\infty_+(\Gamma)$ satisfaz $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad \forall x \in \Gamma_+$ e g ; $I\!R \to I\!R$ é uma função não descrescente tal que

$$g(0) = 0, \quad g(s)s > 0, \quad |g(s)| \leq C(1 + |s|), \quad \forall s \neq 0. \tag{1.10}$$

Da teoria de semigrupos mostra-se que para qualquer par de dados iniciais $(y_0, y_1) \in V \times L^2(\Omega)$, as equações (1.5)-(1.8) têm solução única y tal que

$$y \in C^0(I\!R^+, V) \cap C^1(I\!R^+, L^2(\Omega)). \tag{1.11}$$

Definimos a energia associada com a solução y das equações (1.5)-(1.8) como segue:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla y|^2 + |y'|^2)dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} \alpha y^2 d\Gamma. \tag{1.12}$$

Pela fôrmula de Green, obtemos (sem rigor)

$$\frac{d}{dt}E(t) = E'(t) = -\int_{\Gamma_+} g(y')y'd\Gamma \leq 0, \tag{1.13}$$

tão (1.10) implica que a energia $E(t)$ é não crescente e define um funcional de Liapunov.

Pode-se mostrar a estabilização forte aplicando o princípio de invariância de La'Salle. sso objetivo principal é estimar uma taxa de decaimento da Energia $E(t)$, quando função não linear g satisfaz uma adequada condição de crescimento. O problema de imar a taxa de decaimento da energia tem sido extensivamente estudada por vários tores, como Chen, Lagnese, Russell. Recentemente Zuazua usando o método de mul- licadores, estabelecendo estimativas no caso em que $\alpha > 0$ é uma constante pequena. caso de um "feedback" linear, também prova o decaimento exponencial uniforme para alquer $\alpha > 0$ por argumentos de compacidade única. Nós obtemos uma alternativa este resultado, no sentido que mostraremos a estimativa para qualquer $\alpha \in L^\infty(\Gamma_+)$ sitivo no caso do "feedback" não linear g.

Nossos dois maiores resultados são:

orema 1.1 *Seja Ω um aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$, como definido na introdução, n fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Suponhamos que g é uma função não decrescente que isfaz a hipótese (1.10). Então para toda solução y das equações (1.5)-(1.8), temos:*

(i) Se existem constantes positivas C_1, C_2 tal que

$$C_1|s| \leq |g(s)| \leq C_2|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

então dada qualquer constante $M > 1$, existe uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$E(t) \leq M E(0) e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.15}$$

ii) Se existem constantes positivas C_1,C_2 e $p > 1$ tal que

$$C_1 min(|s|, |s|^p) \leq |g(s)| \leq C_2|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

o dada qualquer constante $M > 1$, existe uma constante $\mu > 0$ dependendo de $E(0)$ ue

$$E(t) \leq M E(0)(1 + \mu t)^{-2p/(p-1)}, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.17}$$

rema 1.2 *Seja Ω como no teorema anterior. Suponhamos que g é uma função ínua e não decrescente tal que se satisfaz a hipótese (1.10). Seja y qualquer solução uação (1.5)-(1.8). Se existem constantes positivas C_1, C_2 e $p < 1$ tal que*

$$C_1|s| \leq |g(s)| \leq C_2 max(|s|, |s|^p), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

então dada qualquer constante $M > 1$, existe uma constante $\mu > 0$, dependendo de $E(0)$ tal que

$$E(t) \leq M E(0)(1+\mu t)^{-2p/(1-p)}. \tag{1.19}$$

2 Demonstração dos principais resultados

Começaremos dando um breve esquema da demonstração da existência e unicidade das soluções das equações (1.5)-(1.8) via semigrupos. Definimos

$$H = V \times L^2(\Omega), \tag{2.20}$$

com o produto escalar

$$\langle (y, y'), (z, z') \rangle = \int_\Omega (\nabla y \nabla z + \widehat{y}\widehat{z}) + \int_{\Gamma+} \alpha y z d\Gamma. \tag{2.21}$$

Introduzimos o operador não linear A sobre H:

$$D(A) = \{(y, \widehat{y}) \in V \times V : \Delta y \in L^2(\Omega), \frac{\partial y}{\partial \nu} + \alpha y = -g(\widehat{y}) \quad sobre \quad \Gamma_+\}, \tag{2.22}$$

que é denso em H, para qualquer $(y, \widehat{y}) \in D(A)$,

$$A(y, \widehat{y}) = (-\widehat{y}, -\Delta y). \tag{2.23}$$

Por meio do operador A, transformamos as equações (1.5)-(1.8) na seguinte forma operacional:

$$(y, \widehat{y})' + A(y, \widehat{y}) = 0, \quad (y(0), \widehat{y}(0)) = (y_0, y_1) \in H. \tag{2.24}$$

Mostra-se facilmente que o operador A é maximal monótono sobre H. Usando teoria de semigrupos, ver Lions-Magenes [7], deduzimos que para qualquer dado inicial $(y_0, y_1) \in D(A)$, a equação (2.24) tem solução forte única y tal que

$$y \in W^{1,\infty}(I\!R^+, V), \quad \Delta y \in L^\infty(I\!R^+, L^2(\Omega)), \tag{2.25}$$

$$\|(y(t), \widehat{y}(t))\|_H \leq \|(y_0, y_1)\|_H, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.26}$$

com regularidade

$$y \in C^0(\mathbb{R}^+, V) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)). \tag{2.27}$$

Por densidade de $D(A)$ em H é o fato de que $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações fortemente contínuo em H, será suficiente provar os terorremas 1 e 2 para dados iniciais mais regulares $(y_0, y_1) \in D(A)$. Por tanto assumimos que a regularidade esta provada.

Começaremos com alguns resultados técnicos.

Lema 2.1 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Então existe uma constante $\beta > 0$ tal que para qualquer $y \in H^1(\Omega)$, a solução ϕ da equação*

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 & em \quad \Omega \\ \phi = y & sobre \quad \Gamma, \end{cases} \tag{2.28}$$

satisfaz as seguintes estimativas:

$$\int_\Omega |\phi|^2 dx \leq \beta^2 \int_\Gamma |y|^2 d\Gamma, \tag{2.29}$$

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla y dx \geq 0. \tag{2.30}$$

Lema 2.2 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ como definido na introdução com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2. Então a seguinte desigualdade se verifica:*

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx \leq (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2 dx + R^2\delta \int_{\Gamma_+} |\partial y/\partial\nu|^2 d\Gamma \tag{2.31}$$

para qualquer função $y \in V$ tal que $\Delta y \in L^2(\Omega)$ e $\partial y/\partial\nu \in L^2(\Gamma)$. Onde $R = \|m\|_{L^\infty(\Gamma)}$.

Demonstração. Suponhamos que $\frac{\partial y}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Neste caso, sabemos que $y \in H^2(\Omega)$. A seguinte identidade é devida a Rellich [9]:

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx = (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2 dx + 2\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial\nu}(m\cdot\nabla y)d\Gamma - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma, \quad \forall y \in H^2(\Omega). \tag{2.32}$$

Da condição geomêtrica de Γ_+, temos que $-m(x)\cdot\nu \leq -\delta^{-1}, \forall x \in \Gamma_+$. Então deste argumento, e da desigualdade de Young aplicado a $\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial\nu}(m\cdot\nabla y)d\Gamma$ vemos que

$$2\int_{\Gamma_+} \frac{\partial y}{\partial\nu}(m\cdot\nabla y)d\Gamma - \int_{\Gamma_+} (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma \leq R^2\delta \int_{\Gamma_+} |\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2 d\Gamma. \tag{2.33}$$

Logo deste último resultado deduzimos de (2.32)

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx \le (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2dx + R^2\delta\int_{\Gamma_+}|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2 d\Gamma$$
$$+2\int_{\Gamma_-}\frac{\partial y}{\partial\nu}(m\cdot\nabla y)d\Gamma - \int_{\Gamma_-}(m\cdot\nu)|\nabla y|^2d\Gamma \tag{2.34}$$

pelo fato de $y=0$ sobre Γ_- então $\nabla y = \nu\frac{\partial y}{\partial\nu}$ sobre Γ_- ver Lions [6], por tanto

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx \le (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2dx + R^2\delta\int_{\Gamma_+}|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_-}(m\cdot\nu)|\nabla y|^2d\Gamma, \tag{2.35}$$

mas, o último termo é negativo, por hipótese, então,

$$2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx \le (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2dx + R^2\delta\int_{\Gamma_+}|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2 d\Gamma, \tag{2.36}$$

o argumento (2.31) se segue pela densidade de $H^{1/2}(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$
A seguir introduzimos o seguinte funcional

$$\rho(t) = 2\int_\Omega y'(m\cdot\nabla y)dx + (n-1)\int_\Omega y'ydx + C_0\int_\Omega y'\varphi dx \tag{2.37}$$

onde φ é solução da equação (2.28) e C_0 uma constante por determinar.

Lema 2.3 *Sob as hipóteses do Teorema 1, existem constantes C_3, C_4 e C_5 tal que se satisfazem as seguintes desigualdades:*

$$|\rho(t)| \le C_3E(t), \tag{2.38}$$

$$\rho'(t) \le -E(t) + C_4\int_{\Gamma_+}|y'|^2d\Gamma + C_5\int_{\Gamma_+}g^2(y')d\Gamma. \tag{2.39}$$

Demonstração: Seja γ a menor constante tal que

$$\int_\Omega \psi^2dx \le \gamma^2\Big\{\int_\Omega|\nabla\psi|^2dx + \int_\Gamma \alpha|\psi|^2d\Gamma\Big\}, \quad \forall\psi\in H^1(\Omega). \tag{2.40}$$

Tomando móduló ao funcional $\rho(t)$ e majorando tem-se:

$$|\rho(t)| \le \|m\|_\infty\int_\Omega 2|y'||\nabla y|dx + (n-1)\gamma\int_\Omega |y'|\frac{1}{\gamma}|y|dx + \frac{C_0\beta}{\sqrt{\alpha_0}}\int_\Omega |y'|\frac{\sqrt{\alpha_0}|\varphi|}{\beta}dx. \tag{2.41}$$

Da desigualdade de Young, obtém-se:

$$|\rho(t)| \leq R\Big\{ \int_\Omega |y'|^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|^2 dx \Big\} + (n-1)\gamma \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |y'|^2 dx + \frac{1}{2\gamma^2} \int_\Omega |y|^2 dx \Big\}$$

$$+ \frac{C_0 \beta}{\sqrt{\alpha_0}} \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |y'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha_0 \frac{|\varphi|^2}{\beta^2} dx \Big\}. \tag{2.42}$$

De (2.40) em (2.42) e da definição de $E(t)$, temos

$$|\rho(t)| \leq 2RE(t) + (n-1)\gamma E(t) + \frac{C_0 \beta}{\sqrt{\alpha_0}} \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |y'|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\beta^2} \int_\Omega |\varphi|^2 dx \Big\}. \tag{2.43}$$

Do Lema 2.1 nesta última expressão conseguimos

$$|\rho(t)| \leq (2R + (n-1)\gamma + \frac{C_0 \beta}{\sqrt{\alpha_0}}) E(t), \tag{2.44}$$

logo basta considerar

$$C_3 = 2R + (n-1)\gamma + \frac{C_0 \beta}{\sqrt{\alpha_0}}.$$

Derivando o funcional ρ, temos

$$\rho'(t) = 2 \int_\Omega y''(m \cdot \nabla y) dx + 2 \int_\Omega y'(m \cdot \nabla y') dx + (n-1) \int_\Omega y'' y dx +$$

$$(n-1) \int_\Omega |y'|^2 dx + C_0 \int_\Omega y'' \varphi dx + C_0 \int_\Omega y' \varphi' dx. \tag{2.45}$$

De (2.45), de y, como solução da equação (1.5)-(1.8) e da indentidade de Green

$$\rho'(t) = 2 \int_\Omega \Delta y (m \cdot \nabla y) dx + 2 \int_\Omega y'(m \cdot \nabla y') dx + (n-1) \Big\{ \int_{\Gamma_+} \frac{\partial y}{\partial \nu} y d\Gamma - \int_\Omega |\nabla y|^2 dx \Big\}$$

$$+(n-1) \int_\Omega |y'|^2 dx + C_0 \Big\{ \int_{\Gamma_+} \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi d\Gamma - \int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx \Big\} + C_0 \int_\Omega y' \varphi' dx, \tag{2.46}$$

reordenando os termos comuns,

$$\rho'(t) = 2 \int_\Omega \Delta y (m \cdot \nabla y) dx + 2 \int_\Omega y'(m \cdot \nabla y') dx + (n-1+C_0) \int_{\Gamma_+} \frac{\partial y}{\partial \nu} y d\Gamma$$

$$-(n-1) \int_\Omega |\nabla y|^2 dx + (n-1) \int_\Omega |y'|^2 dx$$

$$-C_0 \int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx + C_0 \int_\Omega y' \varphi' dx. \tag{2.47}$$

Observação 1: Nas condições do Teorema 1.

$$2\int_\Omega y'(m\cdot\nabla y')dx = \int_\Omega m\cdot\nabla(y')^2dx$$

$$= \int_\Gamma (m\cdot\nu)(y')^2d\Gamma - \int_\Omega div(m)(y')^2dx = \int_\Gamma (m\cdot\nu)(y')^2d\Gamma - n\int_\Omega |y'|^2dx$$

$$\leq \int_{\Gamma_+}(m\cdot\nu)(y')^2d\Gamma - \int_\Omega |y'|^2dx.$$

Por tanto da observação acima, na equação (2.47) temos

$$\rho'(t) \leq 2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx + \int_\Gamma (m\cdot\nu)(y')^2d\Gamma - \int_\Omega |y'|^2dx + (n-1+C_0)\int_{\Gamma_+}\frac{\partial y}{\partial\nu}yd\Gamma$$

$$-(n-1)\int_\Omega |\nabla y|^2dx - C_0\int_\Omega \nabla y\nabla\varphi dx + \int_\Omega y'\varphi' dx. \qquad (2.48)$$

O primeiro termo será estimado via o lema 2.2, o penúltimo por (2.30) é negativo e o útimo será estimado pela desigualdade de Young e o uso do Lema 2.1. Então temos

$$\begin{aligned}\rho'(t) \leq (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2dx + R^2\delta\int_{\Gamma_+}|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2d\Gamma + \int_\Gamma (m\cdot\nu)(y')^2d\Gamma - \int_\Omega |y'|^2dx \\ +(n-1+C_0)\int_{\Gamma_+}\frac{\partial y}{\partial\nu}yd\Gamma - (n-1)\int_\Omega |\nabla y|^2dx + \\ \frac{1}{2}\int_\Omega |y'|^2dx + \frac{C_0^2\beta^2}{2}\int_{\Gamma_+}|y'|^2d\Gamma. \qquad (2.49)\end{aligned}$$

Agrupando os termos comuns e utilizando o fato de que $|m\cdot\nu|\leq R$ temos

$$\begin{aligned}\rho'(t) \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega |y'|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2dx + \Big(\frac{C_0^2\beta^2}{2}+R\Big)\int_{\Gamma_+}|y'|^2d\Gamma \\ +\theta R^2\delta\int_{\Gamma_+}|\frac{\partial y}{\partial\nu}|^2d\Gamma + (n-1+C_0)\int_{\Gamma_+}\frac{\partial y}{\partial\nu}yd\Gamma. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

onde $1\leq\theta$, constante a ser determinada.

Observação 2 : Temos como hipótese que

$$\frac{\partial y}{\partial\nu} = -\alpha y - g(y') \quad sobre \quad \Gamma_+$$

por tanto,

$$|\frac{\partial y}{\partial \nu}|^2 = \alpha^2 y^2 + 2\alpha y g(y') + g^2(y')$$
$$\leq -\|\alpha\|\alpha y^2 - 2\|\alpha\| y\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\|\alpha\|}{\alpha_0} g^2(y'), \quad sobre \quad \Gamma_+.$$

Então temos

$$\int_{\Gamma_+} |\frac{\partial y}{\partial \nu}|^2 d\Gamma \leq -\|\alpha\| \int_{\Gamma_+} \alpha y^2 d\Gamma - 2\|\alpha\| \int_{\Gamma_+} y\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma + \frac{\|\alpha\|}{\alpha_0}\int_{\Gamma_+} g^2(y') d\Gamma. \tag{2.51}$$

onde $\|\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$. Utilizando o argumento desta última observação em (2.50), obtém-se

$$\rho'(t) \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega |y'|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx - \|\alpha\|\theta R^2\delta \int_{\Gamma_+} \alpha y^2 d\Gamma +$$
$$\frac{\|\alpha\|\theta R^2 \delta}{\alpha_0}\int_{\Gamma_+} g^2(y') d\Gamma + \Big(\frac{C_0^2\beta^2}{2} + R\Big)\int_{\Gamma_+} |y'|^2 d\Gamma +$$
$$(n - 1 + C_0 - 2\theta R^2\delta\|\alpha\|)\int_{\Gamma_+} y\frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma. \tag{2.52}$$

Para para obter o resultado proposto vamos considerar valores para θ e C_0:

$$\theta = max\Big\{1, \frac{1}{\|\alpha\|\theta R^2\delta}, \frac{n-1}{\|\alpha\|\theta R^2\delta}\Big\}$$

e

$$C_5 = \frac{\theta R^2 \delta \|\alpha\|}{\alpha_0}.$$

Demonstração do Teorema 1. Das hipóteses dadas no enunciado do Teorema 1 tem-se que $g^2(s) \leq C_2^2|s|^2, \quad \forall s \in I\!R$, logo, do Lema 2.3, (2.39) temos

$$\rho'(t) \leq -E(t) + C_6\int_{\Gamma_+} |y'|^2 d\Gamma,$$

onde $C_6 = C_4 + C_2^2 C_5$.

Seja $\varepsilon > 0$, definimos a energia perturbada do sistema por

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon(E(t))^{\frac{p-1}{2}}\rho(t).$$

Como a energia do sistema é não crescente, dado $M > 1$, prova-se que

$$M^{-1/2}(E_\varepsilon(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq (E(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq M^{1/2}(E_\varepsilon(t))^{\frac{p+1}{2}}, \tag{2.53}$$

desde que

$$\varepsilon \leq \frac{1}{C_3}(E(0))^{\frac{1-p}{2}}(1 - M^{\frac{-1}{p+1}}) = C_7(E(0))^{\frac{1-p}{2}}.$$

A seguir calculamos a derivada da energia perturbada:

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon(\frac{p-1}{2})(E(t))^{\frac{p-3}{2}}E'(t)\rho(t) + \varepsilon(E(t))^{\frac{p-1}{2}}\rho'(t). \tag{2.54}$$

Dos resultados anteriores, temos

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}}\Big\} \int_{\Gamma_+} g(y')y'd\Gamma \\ +\varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+} |y'|^2 d\Gamma - \varepsilon(E(t))^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \tag{2.55}$$

veja-se que isto é equivalente a

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}}\Big\} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\leq 1\}} g(y')y'd\Gamma + \\ \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}}\Big\} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g(y')y'd\Gamma + \\ \varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma + \varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} |y'|^2 d\Gamma - \\ \varepsilon(E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Das condições (1.14)sobre a g, vemos que

$$C_1|s| \leq |g(s)|, \quad \forall s \geq 1,$$

dessa forma da desigualdade anterior deduz-se que

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}}\Big\} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\leq 1\}} g(y')y'd\Gamma \\ +\varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma \\ +\Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \varepsilon\frac{C_6}{C_1}(E(0))^{\frac{p-1}{2}}\Big\} \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} |y'|^2 d\Gamma - \varepsilon(E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Escolhemos ε de tal forma que

$$\Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \varepsilon\frac{C_6}{C_1}(E(0))^{\frac{p-1}{2}} \Big\} \leq 0$$

,

por tanto

$$E_\varepsilon'(t) \leq \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} \Big\} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} g(y')y'd\Gamma + \varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma - \varepsilon(E(t))^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.58}$$

Agora distingamos dois casos.

Caso 1: Quando $p = 1$, tem-se

$$E_\varepsilon'(t) \leq -\int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} g(y')y'd\Gamma + \varepsilon C_6 \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma - \varepsilon E(t), \tag{2.59}$$

de (1.14),

$$E_\varepsilon'(t) \leq (1 - \frac{\varepsilon C_6}{C_1}) \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} -g(y')y'd\Gamma - \varepsilon E(t), \tag{2.60}$$

escolhemos ε de forma que $1 - \frac{\varepsilon C_6}{C_1} \geq 0$, isto é, $\varepsilon \leq \frac{C_1}{C_6}$, logo

$$E_\varepsilon' \leq -\varepsilon E(t), \tag{2.61}$$

De (2.53) para $p = 1$ resolvemos a equação, obtendo

$$E(t) \leq M E(0) e^{-\lambda t} \quad onde \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\sqrt{M}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.62}$$

Caso 2: Quando $p > 1$. Utilizemos a desigualdade de Young para estimar a segunda integral de (2.58)

$$\varepsilon C_6(E(t))^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma < \frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon(2C_6)^{\frac{p+1}{2}} (\int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\leq 1\}} |y'|^2 d\Gamma)^{\frac{p+1}{2}}, \tag{2.63}$$

de (2.58), utilizando o resultado de (2.63), tem-se

$$E'_\varepsilon(t) \le \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} \Big\} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\le 1\}} g(y')y'd\Gamma$$
$$+\varepsilon(2C_6)^{\frac{p+1}{2}}(\int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\le 1\}} |y'|^2 d\Gamma)^{\frac{p+1}{2}} - \frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \tag{2.64}$$

Aplicando a desigualdade de Holder em $\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\le 1\}} |y'|^2 d\Gamma$ de (2.64) temos

$$E'_\varepsilon(t) \le \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} \Big\} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\le 1\}} g(y')y'd\Gamma$$
$$+\varepsilon(2C_6)^{\frac{p+1}{2}}|\Gamma_0 \cap \{|y'|\le 1\}|^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\le 1\}} |y'|^{p+1} d\Gamma - \frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \tag{2.65}$$

Da hipótese sobre g no item (ii) do Teorema 1, temos para $|s|\le 1$,

$$|s|^p = min\{|s|,|s|^p\} \le \frac{1}{C_1}|g(s)| \quad logo \quad |s|^{p+1} \le \frac{1}{C_1}sg(s), \tag{2.66}$$

de esta forma, de (2.66) em (2.65) tem-se

$$E'_\varepsilon(t) \le \Big\{ -1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \varepsilon(2C_6)^{\frac{p+1}{2}}|\Gamma_0|^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{C_1} \Big\} \int_{\Gamma_+ \cap \{|y'|\le 1\}} g(y')y'd\Gamma$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{p+1}{2}}, \tag{2.67}$$

podemos escolher $\varepsilon > 0$, tal que

$$-1 + \varepsilon(\frac{p-1}{2})C_3(E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \varepsilon(2C_6)^{\frac{p+1}{2}}|\Gamma_0|^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{C_1} \le 0,$$

por tanto,

$$E'_\varepsilon(t) \le -\frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{p+1}{2}} \quad \forall t \ge 0, \tag{2.68}$$

Resolvendo a equação, tomando em conta (2.53)

$$E(t) \le ME(0)\{1+\mu t\}^{\frac{2}{1-p}},$$

onde $\mu = \frac{\varepsilon}{4}(p-1)(E(0))^{\frac{p-1}{2}}M^{\frac{-1}{p+1}}$.

Demonstração do Teorema 2. Nas hipótese do teorema 1.2. como g satisfaz $C_1|s| \le |g(s)|$, $\forall s \in I\!R$ de (1.18) então temos a partir de (2.40)

$$\rho'(t) \leq -E(t) + C_6 \int_{\Gamma_+} g^2(y')d\Gamma, \tag{2.69}$$

onde $C_6 = \frac{C_4}{C_1^2} + C_5$.

Seguidamente dado $\varepsilon > 0$, introduzimos a energia perturbada $E_\varepsilon(t)$,

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon(E(t))^{\frac{1-p}{2p}}\rho(t). \tag{2.70}$$

Dado $M > 1$ temos para um ε suficientemente pequeno, e tomando em consideração (2.39), verificase que

$$M^{-1/2}(E_\varepsilon(t))^{\frac{p+1}{2p}} \leq E(t)^{\frac{p+1}{2p}} \leq M^{1/2}(E_\varepsilon(t))^{\frac{p+1}{2p}}, \tag{2.71}$$

desde que

$$\varepsilon \leq \frac{1}{C_3}(E(0))^{\frac{p-1}{2p}}(1 - M^{\frac{-p}{p+1}}) = C_7(E(0))^{\frac{p-1}{2p}}.$$

Derivando o funcional de energia perturbada com respecto a t temos

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon(\frac{1-p}{2p})(E(t))^{\frac{1-3p}{2p}}E'(t)\rho(t) + \varepsilon(E(t))^{\frac{1-p}{2p}}\rho'(t). \tag{2.72}$$

De (2.39), (2.70) e (1.13), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big(-1 + C_3\varepsilon(\frac{1-p}{2p})(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}\Big) \int_{\Gamma_+} g(y')y'd\Gamma \\ +\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}} \int_{\Gamma_+} g^2(y')d\Gamma - \varepsilon E(t)^{\frac{1+p}{2p}}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Da hipótese sobre g em (1.18) tem-se as seguintes considerações:

$$Se \quad |s| \geq 1, \quad logo \quad |g(s)|^2 \leq C_2 g(s)s, \tag{2.74}$$

$$Se \quad |s| < 1, \quad logo \quad |g(s)|^2 \leq C_2^{\frac{2}{p+1}}\{g(s)s\}^{\frac{2p}{p+1}}. \tag{2.75}$$

A equação (2.74) pode ser decomposta como segue,

$$E'_\varepsilon(t) \leq \Big(-1 + C_3\varepsilon(\frac{1-p}{2p})(E(0))^{\frac{1-2p}{2p}}\Big)\Big\{\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g(y')y'd\Gamma + \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g(y')y'd\Gamma\Big\}$$

$$+\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\Big\{\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g^2(y')d\Gamma+\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma\Big\}-\varepsilon E(t)^{\frac{1+p}{2p}}. \tag{2.76}$$

De (2.73) deduzimos

$$\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g^2(y')d\Gamma \leq \varepsilon C_6 E(0)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} C_2 g(y')y'd\Gamma, \tag{2.77}$$

então se tivermos

$$\varepsilon C_6 E(0)^{\frac{1-p}{2p}} \leq 1-\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}},$$

temos que

$$\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g^2(y')d\Gamma \leq \Big\{1-\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}\Big\}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|\geq 1\}} g(y')y'd\Gamma.$$

Logo do resultado acima e (2.75)

$$\begin{aligned}E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{-1+\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}\Big\}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g(y')y'd\Gamma\ +\\ \varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma\ -\\ \varepsilon E(t)^{\frac{1+p}{2p}}.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Da desigualdade de Young,

$$\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{1+p}{2p}}+\varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}}. \tag{2.79}$$

Observemos o último termo acima, então de (2.74)

$$\varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}} \leq \varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}C_2^{1/p}(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} (g(y')y')^{\frac{2p}{1+p}}d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}},$$

logo reemplazando isto acima, em (2.76)

$$\varepsilon C_6 E(t)^{\frac{1-p}{2p}}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g^2(y')d\Gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}(E(t))^{\frac{1+p}{2p}}$$

$$+\varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}C_2^{1/p}(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}}(g(y')y')^{\frac{2p}{1+p}}d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}}, \tag{2.80}$$

agora (2.79) em (2.77)

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{-1+\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}\Big\}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g(y')y'd\Gamma \; + \\ \varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}C_2^{1/p}(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}}(g(y')y')^{\frac{2p}{1+p}}d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}} - \\ \frac{\varepsilon}{2}E(t)^{\frac{1+p}{2p}}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Podemos conseguir uma majoração a mais, para

$$(\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}}(g(y')y')^{\frac{2p}{1+p}}d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}},$$

aplicando a desigualdade de Holder

$$\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}}(g(y')y')^{\frac{2p}{1+p}}d\Gamma)^{\frac{1+p}{2p}} \leq \int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}}(g(y')y')d\Gamma\cdot\Big\{med\Gamma\Big\}^{\frac{1-p}{2p}}. \tag{2.82}$$

Por tanto de (2.81) em (2.80)

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leq \Big\{-1+\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}+\varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}C_2^{1/p}+\Big\{med\Gamma\Big\}^{\frac{1-p}{2p}}\Big\}\int_{\Gamma_+\cap\{|y'|<1\}} g(y')y'd\Gamma \\ -\frac{\varepsilon}{2}E(t)^{\frac{1+p}{2p}}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Se tivermos

$$-1+\varepsilon\frac{1-p}{2p}C_3(E(0))^{\frac{1-p}{2p}}+\varepsilon(2C_6)^{\frac{1+p}{2p}}C_2^{1/p}+\Big\{med\Gamma\Big\}^{\frac{1-p}{2p}} \leq 1,$$

então

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t)^{\frac{1+p}{2p}}. \tag{2.84}$$

Resolvendo esta equação considerando (2.72)

$$E(t) \leq E(0)M(1+\mu t)^{\frac{-2p}{1-p}}.$$

Referências

[1] Francis Conrad and Bopeng Rao, it Decay of solutions of the wave equation in sta. shaped domain with nonlinear boundary feedback Asymptotic Analysis 7(1993) pp 159-177.

[2] V. Komornik and Enrike Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. pures et appl. 69 (1990)pp 33-54.

[3] V. Komornik; *Rapid boundary stabilization of the wave equation*, SIAM J. Control and Optimization 29 pp 197-208 (1991).

[4] I. Lasiecka; *Global uniform decay rates for the solution to the wave equation with nonlinear boundary conditions*, Applicable Analysis Vol.47, pp. 191-212 (1992).

[5] I. Lasiecka, *Exponential decay rates for the solutions of Euler-Bernoulli equations with boundary dissipation ocurring in the moments only*, Journal of Differential Equations 95 pp 169-182 (1992).

[6] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1 (Masson, Paris 1988).

[7] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes* (Dunod, Paris 1968).

[8] M. Nakao; *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation* Mathematische Annalen 305, pp 403-417 (1996).

[9] E. Zuazua; *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Communication in PDE 15 pp 205-235 (1990).

[10] E. Zuazua; *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear wave equation boundary feedback*, SIAM J. control and optimization 28 pp 466-477 (1990).