Teorema de Gauss

O teorema de Gauss estabelece uma relação entre uma integral tripla, numa região sólida (W) de $\mathbb{R}^3$, com uma integral de superfície na sua fronteira (∂W). Este teorema é um instrumento poderoso para os modelos matemáticos que descrevem alguns fenômenosfísicos como fluxo de fluidos, fluxo de campos elétricos ou magneticos e fluxo de calor.

Teorema .1 (Gauss-Divergência) *Considerem-se:*

- *Seja* W *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^3$ *tal que a sua fronteira é uma superfície* $S = \partial W$, *orientada segundo a normal exterior* ($\vec{n}_e$).

- *Seja* $\vec{F}$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em um aberto* U *contendo* W.

Então:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}_e)\, dS = \iiint_W \mathrm{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz$$

Nota:

- Se $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ então
$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

- Quando W não é simples, podemos decompô-la como união finitas de regiões simples, isto é,
$$W = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_n$$
Usando o teorema de Gauss em cada região simples (W_i),obtemos:
$$\iiint_W \text{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial W_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}_e)\, dS + ... + \iint_{\partial W_n} (\vec{F} \cdot \vec{n}_e)\, dS$$

Observando que os vetores normais exteriores à fronteira comum de duas regiões simples sao opostos, concluimos que as integrais de superfície correspondentes são simétricas e, portanto, se cancelam. Assim, obtem-se:

$$\iint_{\partial W_1} (\vec{F}\cdot\vec{n}_e)\, dS + ... + \iint_{\partial W_n} (\vec{F}\cdot\vec{n}_e)\, dS = \iint_{\partial W} (\vec{F}\cdot\vec{n}_e)\, dS$$

Exercicios:

1. Verifique o Teorema da Divergência sendo

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z, \ z \leq 1\right\}$$

e $\vec{F} = (0, 0, z)$.

2. Calcule, usando o Teorema da Divergencia, o integral $\iint_{\partial W} (\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS$ onde $\vec{n}$ é a normal com a terceira componente negativa, $\vec{F}(x,y,z) = (x,z,y)$ e

$$\partial W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2, \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

3. Usando o Teorema da Divergencia, calcule o fluxo de $\vec{G}(x,y,z) = (-z, y, y)$ através da superfície

$$\partial W = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - x^2 - y^2, \ z \geq 0, x \leq 0\Big\}$$

no sentido da normal com a terceira componente negativa.

4. Usando o Teorema da Divergencia, calcule o volume da região

$$W = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 \leq 9, \ z \geq 0, |x| \leq 5\Big\}.$$

5. Calcule o fluxo de $\vec{G}(x,y,z) = (2x, -y, 1-z)$ através da superfície

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - x^2 - y^2, \ y \geq 0, z \geq 0\Big\}$$

no sentido da normal com a terceira componente positiva.

6. Considere as regiões

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2 - x^2 - y^2, \ x \geq 0, z \geq 1\right\}$$

e

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2, \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Seja $\vec{H} = (0, 0, z)$. Calcule o volume do interior de $S_1 \cup S_2$ usando o T. Div.