

MAT. & CLIMA

CIÊNCIA(S) CLIMÁTICA(S)

- CLIMAT.
- GEOL. / GEOT.
- FÍS.
- QUI.
- ~~MAT.~~
- ~~EST.~~
- COMPUT.
- ENG. MEIO AMB.
- ...

MÉTODOS QUALITATIVOS / QUANTITATIVOS

2º CURSO

OBJETIVO: USAR MODELOS CONCEITUAIS QUE ILUSTRAM ASPECTOS IMPORTANTES DO SIST. CLIM. TERRESTRE E APRESENTAR TÉCNICAS DA MAT. / EST. P/ ANALISAR TALS MODELOS.

(SCT)

OBS.: ÚNICO MODO DE ESTUDAR O SCT É VIA MODELOS MATEMÁTICOS, EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E ANÁLISE DE DADOS. EXPERIMENTOS FÍSICOS CONTROLADOS ESTÃO FORA DE QUESTÃO.

CLIMATE → WEATHER

CLIMA × TEMPO

↳ CONDIÇÕES ATMOSFÉRICAS LOCAIS E DE CURTA DURAÇÃO. (SEG., MIN., HOR., DIAS, SEM., MEI, SEMESTRES, ANOS, DÉCADAS, SÉCULOS, ...)

CLIMA É A MÉDIA TEMPORAL DO TEMPO!

↳ CONDIÇÕES CLIMÁTICAS GLOBAIS E DE LONGA DURAÇÃO.

SCT ← INFLUÊNCIA

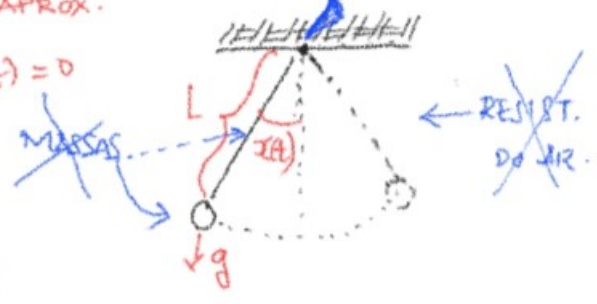
- HIDRUSFERA
- CRIOSFERA
- LITOSFERA
- BIOSFERA
- ATMOSFERA
- RADIAÇÃO SOLAR
- RELAÇÃO ENTRE TALS COMPONENTES
- FORÇAMENTOS (FORCINGS)

FATORES EXTERNOS NATURAIS (TALS COMO VARIACÕES CICLICAS DA ORBITA DA TERRA EM TORNO DO SOL, ERUPÇÕES VOLCÂNICAS, VARIACÕES NA ATIVIDADE SOLAR, ETC.) E ANTRÓPOGÊNICOS, ISTO É, INDUZIDOS PELO HOMEM (TALS COMO COMPOSIÇÃO ATMOSFÉRICA, UO DA TERRA, ETC.)

MOD. MAT. → SEMPRE É UMA APROX.

Ex.: PÊNDULO: $L \ddot{x}(t) + g \sin x(t) = 0$

MESMO DESCONSIDERANDO ALGUMAS COMPONENTES FÍSICAS, PODEMOS OBTER, POR EX., O PERÍODO, FUNDAMENTAL P/ RELÓGIOS!



MOD. EQ. EN. DA TERRA (MEET)

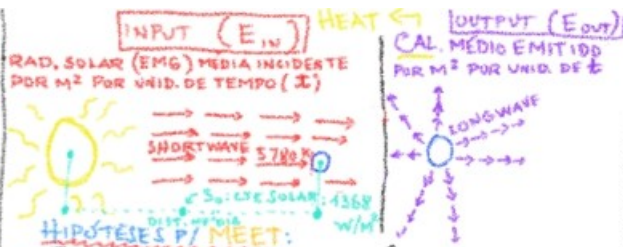
↳ EDO 1ª ORDEM

$$F(t, T(t), \frac{dT}{dt}) = 0$$

c/

t = TEMPO (TIME);

T = TEMPERATURA MÉDIA GLOBAL DA SUP. DA TERRA.



2
 T AUMENTA P/ $E_{IN} > E_{OUT}$;
 T DIMINUI P/ $E_{IN} < E_{OUT}$.

HIPÓTESES P/ MEET:

- TERRA: ESFERA SÓLIDA HOMOGÊNEA;
- IGNORE DIFERENÇAS NA COMPOSIÇÃO ATMOSFÉRICA;
- " " EM TOPOGRAFIA, OCEANOS, CONTINENTES, CARACTERÍSTICAS LOCAIS, INSOLAÇÃO, ETC.
- A ENERGIA NECESSÁRIA P/ AUMENTAR T DE 1 K MEDIDA EM WATT-YEAR/M²K, É SUPOSTA CONSTANTE $\epsilon = C$, SEU VALOR MÉDIO.

TAL ENERGIA É CONHECIDA COMO CAPACIDADE DE CALOR (HEAT CAPACITY) DO SIST.

VARIA c/ LATITUDE, HORA DO DIA, ESTAÇÃO, NEBULOSIDADE E TENDE A ZERO DURANTE A NOITE. É IGUAL A S_0 QDO A TERRA ESTÁ NA DIST. MÉDIA DO Sol!

OBS: $\Delta T = T(t+\Delta t) - T(t) \Rightarrow$ CAPACIDADE DE CALOR P/ A TEMPERATURA Atingir $T(t+\Delta t) = AC\Delta T$.

↳ ÁREA DA SUP. DA TERRA.

OBS: SOL É A ÚNICA FONTE DE ENERGIA DO SIST. $\Rightarrow AC\Delta T = A(E_{IN} - E_{OUT})\Delta t$.

• $C \frac{dT}{dt} = E_{IN} - E_{OUT}$ p/ $\Delta t \rightarrow 0$.

OBS: E_{IN} E E_{OUT} DEPENDEM DE $T(t)$.

OBS: \exists FORÇAMENTO, $E_{IN} = E_{IN}(t)$ E $E_{OUT} = E_{OUT}(t)$.

• MEET É UMA EDO \tilde{n} AUTON.

• FORÇAMENTO, $E_{IN} = E_{IN}(T(t))$ E $E_{OUT} = E_{OUT}(T(t))$.

OBS: SIST. ATINGE EQUIL. $\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow E_{IN} = E_{OUT}$.

PERGUNTA: $E_{IN} = ?$, $E_{OUT} = ?$

MEET BÁSICO VISTA DO SOL, A TERRA É UM DISCO PLANO DE RAIO R.

$$E_{IN} = \frac{(1-\alpha) \cdot T \cdot R^2 \cdot S_0}{4\pi R^2} = (1-\alpha)Q$$

↳ SUP. DA TERRA $Q = \frac{1}{4} S_0$

ALBEDO (MÉDIO) = FRAÇÃO DA EMG \tilde{n} INTERCEPTADA PELA TERRA VIA REFLEXÃO DEVIDO AS NUVENS, COMPOSIÇÃO ATMOSFÉRICA (POR EX., AEROSÓIS), GELÓNIOS, ETC.

$$E_{OUT} = E_{OUT}(T) = \sigma T^4$$

(LEI DE STEFAN-BOLTZMANN P/ RADIÇÃO DE CORPO NEGRO (BLACKBODY RADIATION))

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/M}^2 \text{ K}^4$$

• MEET FICA $C \frac{dT}{dt} = (1-\alpha)Q - \sigma T^4$

• NO EQUILÍBRIO, TEMOS

$$(1-\alpha)Q = \sigma T^4$$

ISTO É,

$$T^* = \left[\frac{(1-\alpha)Q}{\sigma} \right]^{1/4}$$

• $\alpha = 0.30$ (VALOR MÉDIO TÍPICO), $S_0 = 1368 \text{ W/M}^2$

$$T^* = 254.8 \text{ K}$$

OBS: VALOR MÉDIO ("DE FATO") P/ A TEMPERATURA DA SUP. DA TERRA É 287,7 K. (MÉDIA EM 2010)

MEET c/ EFEITO ESTUFA

VAMOS AJUSTAR O MEET

BÁSICO c/ O EFEITO

ESTUFA P/ TENTAR

CORRIGIR TAL DISCREPÂNCIA P/ T^* !

EFEITO ESTUFA

$$E_{IN} : \begin{cases} 9\% \text{ ULTRAVIOLETA (COMP. ONDA } < 0.4 \mu\text{M)} \\ 38\% \text{ LUZ VISÍVEL (} 0.4 \mu\text{M } \leq \text{COMP. ONDA } < 0.7 \mu\text{M)} \\ 53\% \text{ PRÓX. DE INFRAVERM. (} 0.7 \mu\text{M } \leq \text{C.O } < 4 \mu\text{M)} \end{cases}$$

$$E_{OUT} : \text{INFRAVERM. } < / > \text{C.O } > 5 \mu\text{M.}$$

DEVIDO AS SUAS PROPRIEDADES QUÍMICAS, OS GASES DO EFEITO ESTUFA (CO_2 , VAPOR D'ÁGUA, METANO, E AEROSÓIS) DEIXAM A ATMOSFERA MAIS OPACA P/ E_{OUT} MAS Ñ P/ E_{IN} .

P/ TENTAR MANTER O EQUI. ENERGÉTICO, VAMOS PARAMETRIZAR E_{OUT}

c/ $0 < \epsilon < 1$: $E_{OUT} = \epsilon \sigma T \Rightarrow (1-\alpha)Q = \epsilon \sigma T$
 $\Rightarrow T^* = \left(\frac{(1-\alpha)Q}{\epsilon \sigma} \right)^{1/4}$

OBS: $\alpha = 0.30$, $S_0 = 1368 \frac{\text{W}}{\text{M}^2}$ E $\epsilon = 0.62 \Rightarrow T^* = 287.7 \text{ K} !$

MEETC/MÚLTIPLOS PTOS DE EQUI.:

$\alpha = \alpha(T)$. (POR EX., MUDANÇA DE H_2O P/ GELO/NEVE QDO T CAI ABAIXO DE APROX. 250 K. DAI

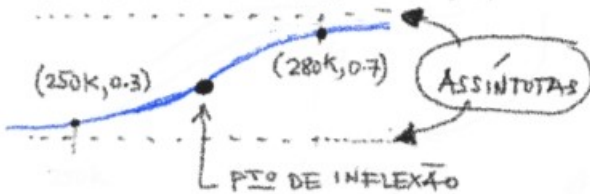
$\alpha = 0.30$ PODE Ñ SER ADEQUADO P/ BAIXAS TEMPERATURAS!)

(*) $\alpha(T) \approx \begin{cases} 0.7 \text{ SE } T < 250 \text{ K} \\ 0.3 \text{ " } T > 280 \text{ K} \end{cases}$

$T^* = 287.7 \text{ K (2010)}$

UMA PARTE MAIOR DE E_{IN} É REFLETIDA NUMA TERRA COBERTA POR GELO E NEVE P/ T SUFICIENTEM. PEQUENO!

BUSCAMOS UMA DINÂMICA $(1-\alpha(T)) \times T$ TIPO:



(*) É OBTIDA VIA, POR EX.:

$\alpha(T) = 0.5 - 0.2 \tanh\left(\frac{T-265}{10}\right)$

c/ PTO DE INFLEXÃO (265 K, 0.5)

$\therefore \begin{cases} E_{IN}(t) = (1-\alpha(T))Q \\ E_{OUT}(T) = \epsilon \sigma T^4 \end{cases}$
 $\epsilon C \frac{dT}{dt} = (1-\alpha(T))Q - \epsilon \sigma T^4$

c/ $\bar{\epsilon}$ EQUI. ATINGIDO P/ T SATISFAZENDO

$(1-\alpha(T))Q = \epsilon \sigma T^4$

QUE Ñ TEM SOL. ANALÍTICA, APENAS NUMÉRICA!

$T_1^* \approx 288 \text{ K}$, $T_2^* \approx 265 \text{ K}$ E $T_3^* \approx 233 \text{ K}$

SÃO AS TEMPERATURAS OBTIDAS NAS INTERSECÇÕES DOS GRÁFICOS

$(1-\alpha(T))Q \times T$ E $\epsilon \sigma T^4 \times T$
P/ $\epsilon = 0.6$.

ANALIZAR c/ FIG. 2.5

O QUE OCORRE EM TORNO DE T_i^* , $i=1,2,3$, EM RELAÇÃO A "ESTABILIDADE."

ESTÁVELS

INSTÁVEL

MEET DE BUDIKO

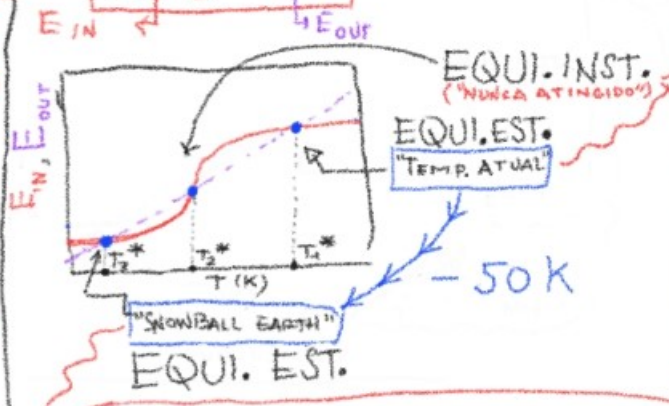
(MOD. MAIS PRÓX. DA REALIDADE P/ E_{out} , BASEADO EM DADOS COLETADOS DE SATELITES (ANTERIORES A 2014))

$$\begin{cases} E_{in} = (1 - \alpha(T))Q \\ E_{out} = A + BT \end{cases}$$

c/ A e B OBTIDOS AJUSTANDO DADOS DE SATELITES.

MELHOR AJUST. (c/ DADOS ANTERIORES A 2014):
 $A = 203,3 \text{ W/M}^2$
 $B = 2,09 \text{ W/M}^2\text{GRAU (CELSIUS)}$
 P/ COMPARAR, APROXIMANDO LINEARMENTE E_{out} DADA COMO NO MOD. ANT.; A e B FICAM DISTANTES DOS VALORES ACIMA!

$$(1 - \alpha(T))Q = A + BT$$



T BEM ACIMA DA TEMPERATURA DE CONGELAMENTO DA ÁGUA. COMO A ESCALA DE t ENGOÇA MILHÕES DE ANOS, TODAS AS RECENTES ERAS DO GELÓ (PERÍODOS GLACIAIS) E INTERGLACIAIS OCORRERAM P/ T PRÓXIMO DE T_1^* .

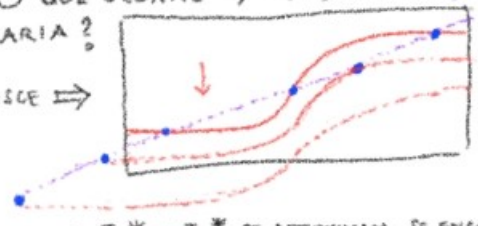
T ABAIXO DA TEMPERATURA DE CONGELAMENTO DOS OCEANOS ATÉ VÁRIOS KMS ABAIXO DO NÍVEL DO MAR. EXISTEM FORTES EVIDÊNCIAS QUE A TERRA PODE TER ATINGIDO T PRÓXIMA DE T_3^* DURANTE A ERA NEOPROTEROZOICA, 750-580 MILHÕES DE ANOS ATRÁS.

PERGUNTAS: TENDO OCORRIDO A "SNOWBALL EARTH":

1. O QUE CAUSOU A TRANSIÇÃO P/ TAL ESTADO? PG. 21
2. " " " " SAÍDA DE " " " " PG. 21
3. NA DINÂMICA DE T_3^* P/ T_1^* , T_2^* NÃO FOI, DE FATO, ATINGIDO? PG. 21-2

PERG.: O QUE OCORRE c/ T_i^* , $i=1,2,3$, Q^{BD} VARIA?

S_0 DECRESCER \Rightarrow



S_0 CRESCER $\Rightarrow T_2^*$ e T_3^* SE APROXIMAM, SE ENCONTRAM...

ISTO É, T_2^* e T_1^* SE APROXIMAM, SE ENCONTRAM E ENTÃO DESAPARECEM, SO SOBRA T_3^* !

MUDANÇA QUALITATIVA NA DINÂMICA DO SIST. Q^{DO} O PARÂMETRO S_0 VARIA!

Q^{DO} UMA PEQUENA VARIAÇÃO NUM PARÂMETRO ALTERA A DINÂMICA DO SIST. (POR EX., DE TRÊS P^{TOS} DE EQUILIBRID, PASSA A TER DOIS E LOBO APENAS UM!), UMA BIFURCAÇÃO OCORRE!

FAZER ANÁLISE DA FIG. 2.6, PÁG. 22,

$$T_i^* \times Q/Q_0$$

$\hookrightarrow Q_0 = 342 \text{ W/M}^2$, VALOR DE Q P/ O CLIMA ATUAL. (É RECOMENDADO QUE O PARÂMETRO DE BIF. SEJA ADMENSIONAL!)

OCEANOS & CLIMA

MANTÊM O EQUILÍBRIO ENERGÉTICO TERRESTRE E AUXILIA NO CICLO DE CARBONO.

TRANSPORTA ENERGIA AO REDOR DA TERRA VIA CIRCULAÇÃO OCEÂNICA (CORRENTES MARINHAS), EM CONSEQUÊNCIA DE DIFERENÇAS DE DENSIDADE ACARRETADAS POR VARIÁVEIS DE SALINIDADE E TEMPERATURA (CTH = CIRCULAÇÃO TERMOHALINA), NUMA ESCALA DE TEMPO (TIME) DE DÉCADAS.

OBS: C/ O AQUECIMENTO GLOBAL E O DERRETIMENTO DAS CALOTAS POLARES, A CONCENTRAÇÃO DE SAL DIMINUI, O QUE PODE INTERROMPER A CTH. EXISTEM FORTES EVIDÊNCIAS PALEOCLIMÁTICAS DE QUE VARIÁÇÕES OU COLAPSO DA CTH COINCIDIRAM COM GRANDE VARIÁÇÕES CLIMÁTICAS!

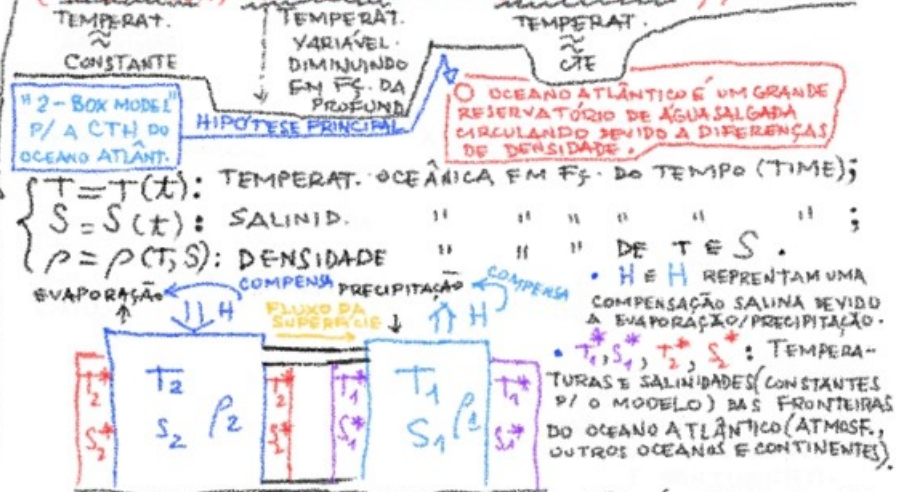
MAIOR CONCENTRAÇÃO DE SAL ⇒ OCEANO MAIS DENSO

TEMP. MENOR
TEMP. MAIOR

5

ANALIZAR "CINTO DE TRANSMISSÃO" ("CONVEYOR BELT"), FIGURAS 3.1 E 3.2, QUE ILUSTRAM A CTH.

ANALIZAR CIRCULAÇÃO OCEÂNICA EM TERMOS DE SUAS "CAMADAS" (MIXED LAYER, THERMOCLINE AND DEEP COLD WATER), FIG. 3.4.



O OCEANO ATLÂNTICO É UM GRANDE RESERVATÓRIO DE ÁGUA SALGADA CIRCULANDO DEVIDO A DIFERENÇAS DE DENSIDADE.

CTH É MANTIDA APENAS PELA VARIÁÇÃO DE $\rho(T,S)$, DEVIDO A DIFERENÇAS DE PRESSÃO NO FUNDO. OUTROS EFEITOS (VENTOS, CORIOLIS, ETC.) SÃO DESCONSIDERADOS.

• A POTÊNCIA Q QUE O FLUXO PASSA DE UMA CAIXA P/ OUTRA É PROPORCIONAL À DIFERENÇAS ENTRE T 'S E ENTRE S 'S, ISTO É, ENTRE ρ 'S.

CONSTANTE HIDRAULICA

PARAMETRIZAÇÃO DE VÁRIAS CONDIÇÕES P/O FLUXO

CONVENÇÃO: $Q > 0$ QDO O FLUXO VAI DA CAIXA 1 P/A 2. (DEVIDO A DENSIDADES MAIS ALTAS P/ LATITUDES MAIS ALTAS)

OBS: Q E k TEM MESMA DIM. POIS $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}$ É ADMENSIONAL (VALOR TÍPICO: $k = 1,5 \times 10^{-6}$)

OBS: CONSIDERE UMA APROX. DE TAYLOR DE 1ª ORDEM P/ $\rho(T,S)$ EM TORNO DOS VALORES MÉDIOS T_0 E S_0 .

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0))$$

H₂O EXPANDE QDO T AUMENTA. ∴ ρ DIMINUI.

H₂O FICA MAIS PESADA QDO S AUMENTA. ∴ ρ AUMENTA.

COEF. DE CONTRAÇÃO TERMAL
" " EXPANSÃO SALINA

T E S TÊM EFEITOS OPOSTOS NA CTH.

VALORES TÍPICOS: $\alpha = 1,5 \times 10^{-4} / \text{grau}$, $\beta = 8 \times 10^{-4} / \text{psu}$

∴ ** EM * : $Q = k (\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1))$ **

2-BOX MODEL P/ A CTH DO OCEANO ATLÂNTICO (CONTINUAÇÃO)

LEIS DE CONSERVAÇÃO DE ENERGIA (TÉRMICA) E MASSA (SALINIDADE) NUM SISTEMA FECHADO:

$$\begin{cases} \frac{dT_1}{dt} = c(T_1^* - T_1) + |q| (T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{dt} = c(T_2^* - T_2) + |q| (T_1 - T_2), \\ \frac{dS_1}{dt} = -H + d(S_1^* - S_1) + |q|(S_2 - S_1), \\ \frac{dS_2}{dt} = H + d(S_2^* - S_2) + |q|(S_1 - S_2). \end{cases}$$

q É DADO POR $(***)$;
 c E d : CTES CARACTERÍSTICAS P/ ESCALAS DE TEMPO (TIME).

OBS: (I) É NÃO LINEAR (NA MULT. POR $|q|$).

OBS:
 $T_0 := \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, $S_0 := \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$.

DAÍ:

$$\begin{cases} \frac{dT_0}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt} \right) \\ = c(T_0^* - T_0), \\ \frac{dS_0}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} \right) \\ = d(S_0^* - S_0). \end{cases}$$

Por outro lado:

$$(ii) \frac{dT_0}{dt} = -cT_0, \quad \frac{dS_0}{dt} = -dS_0$$

$$T_0 = e^{-ct}, \quad S_0 = e^{-dt}$$

(iii) $T_0 = T_0^*$, $S_0 = S_0^*$
 SOL. PARTIC. DE (ii) .

∴ SOL. GERAL DE (ii) :
 $T_0 = e^{-ct} + T_0^*$, $S_0 = e^{-dt} + S_0^*$.

∴ TEMPERATURA E SALINIDADE MÉDIAS DO OCEANO DO MODELO TENDE A TEMP. E SALIN.

MÉDIAS, RESP.^{TE}, DAS FRONTEIRAS DE TAL OCEANO QDO $t \rightarrow \infty$!

∴ T_0^* E S_0^* PODEM SER CONSIDERADOS COMO VALORES DE REFERÊNCIA.

DEF: $\bar{T}_i := T_i - T_0^*$ E $\bar{S}_i := S_i - S_0^*$ SÃO AS "ANOMALIAS", $i=1,2$.

OBS:
 $T_2 - T_1 = \bar{T}_2 - \bar{T}_1$; (III)
 $S_2 - S_1 = \bar{S}_2 - \bar{S}_1$;

$$T_1^* - T_1 = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_1;$$

DE FATO:

$$-\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - (T_1 - T_0^*) = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - T_1 + \frac{1}{2}(T_1 + T_2^*)$$

$$T_2^* - T_2 = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_2;$$

$$S_1^* - S_1 = -\frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_1;$$

$$S_2^* - S_2 = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_2.$$

NOT: $T^* := \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*)$, $S^* := \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*)$.

$$\begin{cases} T_1^* - T_1 = -T^* - \bar{T}_1; & (IV) \\ T_2^* - T_2 = T^* - \bar{T}_2; \\ S_1^* - S_1 = -S^* - \bar{S}_1; \\ S_2^* - S_2 = S^* - \bar{S}_2. \end{cases}$$

Por outro lado, note que:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{d(T_1 - T_0^*)}{dt} \\ &= \frac{dT_1}{dt} \\ &= c(T_1^* - T_1) + |q|(T_2 - T_1) \\ &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|(\bar{T}_2 - \bar{T}_1). \end{aligned}$$

(III) (IV) c/ q AGORA ESCRITO EM TERMOS DAS ANOMALIAS!

ANALOGAMENTE:

$$\frac{d\bar{T}_2}{dt} = c(T^* - \bar{T}_2) + |q|(\bar{T}_1 - \bar{T}_2);$$

$$\frac{d\bar{S}_1}{dt} = -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|(\bar{S}_2 - \bar{S}_1);$$

$$\frac{d\bar{S}_2}{dt} = H + d(S^* - \bar{S}_2) + |q|(\bar{S}_1 - \bar{S}_2).$$

AGORA SUPRIMIMOS AS "BARRAS" DAS 4 ÚLTIMAS EQUAÇÕES S/ ESQUECER QUE ESTAMOS C/ AS ANOMALIAS COMO VARIÁVEIS.

A DIFERENÇA DESTES NOVOS SIST. P/O SIST. (I) É QUE TEMOS AS CONSTANTES T^* E S^* NO LUGAR DE T_i^* E S_i^* , $i=1,2$.

2-BOX MODEL REDUZIDO A UM MODELO 1-D.

CONTINUA

**2-BOX MODEL
REDUZIDO A UM
MODELO 1-D**

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= c(-T^* - T_1) + |q| \Delta T, \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T^* - T_2) - |q| \Delta T, \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + \ell(-S^* - S_1) + |q| \Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + \ell(S^* - S_2) - |q| \Delta S \end{aligned}$$

$c/q = k(\alpha \Delta T - \beta \Delta S)$,
 T_i e S_i SÃO "ANOMALIAS"
DE TEMP. E SALIN., $i=1,2$,
E AS CTES $k, \alpha, \beta, c, \ell$,
 H, T^* e S^* SÃO
COMO DADAS ANT.

HIPÓTESES 7
P/ UNIDIMEN-
SIONALIZAR (CTH):
• $T_i(x) = -T^*$ e $T_i(t) = T^*$
VE, ASSUMINDO QUE, NA
ESCALA DE TEMPO P/A CTH,
 T_i ENTRA EM EQUILÍBRIO
C/ T_i^* IMEDIATAMENTE,
 $i=1,2$, E ΔT É SUFIC. PEQ.

$d=0$, ASSUMINDO QUE $-S^* - S_1$ E $S^* - S_2$ SÃO DESPREZÍVEIS.

C/ TAIS HIPÓTESES (CTH) FICA REDUZIDO A:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = -H + |q| \Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} = H - |q| \Delta S \end{cases} \quad c/q = k(2\alpha T^* - \beta \Delta S).$$

COMO $S_1 + S_2 = \text{CTE}$ (LEMBRE QUE TEMOS UM SIST. FECHADO), A ÚNICA VARIÁVEL É ΔS :

$$\frac{d(\Delta S)}{dt} = 2H - 2k|2\alpha T^* - \beta \Delta S| \Delta S.$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{\beta}{4\alpha k T^*} \frac{d(\Delta S)}{dt}$$

$$= \frac{\beta}{4\alpha k (T^*)^2} \cdot 2(H - k|2\alpha T^* - \beta \Delta S| \Delta S)$$

$$= \frac{\beta H}{4\alpha^2 k (T^*)^2} - \left| \frac{1}{2\alpha T^*} \cdot (2\alpha T^* - \beta \Delta S) \right| \frac{\beta}{2\alpha T^*} \Delta S$$

$$= \lambda - \left| 1 - \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*} \right| \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*}$$

$$= \lambda - |1-x|x,$$

ISTO É,

$$\dot{x} = \lambda - |1-x|x. \quad (†)$$

E QUANTO A ESTABILIDADE/INSTAB. DE x^* ?

VAMOS LINEARIZAR (†) PRÓXIMO DE x^* !

P/ ISSO SEJA $x = x^* + y$ c/ y SUFICIENTEMENTE PEQUENO.

VAMOS ANALISAR O CASO $x < 1$. O CASO $x > 1$ É ANÁLOGO:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda - (1-x)x \rightarrow \therefore \dot{y} = \frac{d}{dt}(x - x^*) \\ &= \lambda - x + x^2 \\ \text{VIA (†).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda - (x^* + y) + (x^* + y)^2 \\ &= \lambda - (1-x^*)x^* + (2x^* - 1)y + y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{P/ } x < 1 \text{ E } y \text{ SUF. PEQ., } \dot{y} = (2x^* - 1)y.$$

ANÁLOG., P/ $x > 1$ E y SUF. PEQ., $\dot{y} = -(2x^* - 1)y$.

$$\therefore x^* = \begin{cases} x_1^* \text{ ESTÁVEL POIS } -(2x_1^* - 1) = -\sqrt{1+4\lambda} < 0. \therefore y = e^{-(2x_1^* - 1)t} \rightarrow 0 \text{ DO } t \rightarrow \infty; \\ x_2^* \text{ INST. " } 2x_2^* - 1 = \sqrt{1-4\lambda} > 0. \therefore y = e^{(2x_2^* - 1)t} \rightarrow \infty \text{ " } t \rightarrow \infty; \\ x_3^* \text{ EST. " } 2x_3^* - 1 = -\sqrt{1-4\lambda} < 0. \therefore y = e^{(2x_3^* - 1)t} \rightarrow 0 \text{ " } t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

CONTINUA

$\alpha := \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*}$,
 $x := |1-x|x$ E
 $\lambda := \frac{\beta H}{4\alpha^2 k T^* (T^*)^2}$, OBSERVANDO
QUE $T^* = \frac{\Delta T}{2} > 0$ POIS $T_2 - T_1 > 0$;
PRÓX. EQUADOR ←
" POLOS ←

ESTADOS DE EQUILÍBRIO

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow |1-x|x = \lambda.$$

COMO $\lambda > 0$, QUALQUER x^* , SATISFAZENDO A EQ. (†), É > 0 .

I CASO: $1-x < 0$, ISTO É, $x > 1$:

$$\begin{aligned} (x-1)x &= \lambda \Rightarrow x^2 - x - \lambda = 0 \\ \Rightarrow x_1^* &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\lambda}). \end{aligned}$$

TAL SOLUÇÃO EXISTE $\forall \lambda > 0$.

II CASO: $1-x > 0$, ISTO É, $x < 1$:

$$\begin{aligned} (1-x)x &= \lambda \Rightarrow x^2 - x + \lambda = 0 \\ \Rightarrow x_{2,3}^* &= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4\lambda}). \end{aligned}$$

TAIS SOLUÇÕES EXISTEM P/ $0 < \lambda < \frac{1}{4}$.

RESUMO:

A CTH P/O OCEANO ATLÂNT., MODELADA VIA UM 2-BOX MODEL, FOI REDUZIDA A EDO DE 1ª ORDEM

$$\text{1D)} \frac{d(\Delta S)}{dt} = 2(H-k)2\alpha T^* - \beta \Delta S / \Delta S$$

ONDE:

ΔS É A ÚNICA VARIÁVEL;
 H, k, α, T^* E β SÃO CTES POSITIVAS.

RE-ESCALONANDO

$$x = \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*}, \text{ (2)}$$

$$x' = 4\alpha k (T^*)^2$$

$$E \lambda = \frac{\beta H}{4\alpha^2 k (T^*)^2}$$

E DENOTANDO

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt'}$$

1D) FICA:

$$\dot{x} = \lambda - (1-x)x \text{ (1)}$$

SOLUÇÕES DE EQUIL. P/ (1) (VIA "BÁSKARA" EM $\dot{x}=0$):

$$x_1^* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\lambda})$$

$$x_{2,3}^* = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4\lambda})$$

x_1^* E x_3^* SÃO ESTÁVEIS;
 x_2^* É INSTÁVEL.

OBS: x_1^* E x_3^* TEM ESTABILIDADES DISTINTAS:

AULA ANT.

$$q = k(2\alpha T^* - \beta \Delta S) = 2k\alpha T^* \left(1 - \frac{\beta \Delta S}{2\alpha T^*}\right) = 2k\alpha T^* (1-x) \text{ NA (2)}$$

q E $1-x$ TÊM MESMOS SINAIS!

$x_1^* > 1 \Rightarrow q < 0$; ("S-MODE")
 $x_3^* < 1 \Rightarrow q > 0$; ("T-MODE")

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

- x_1^* : LINHA CONTÍNUA SUPERIOR;
- x_2^* : " TRAVEJADA;
- x_3^* : " CONTÍNUA INFERIOR.

FIG. 3.7, PÁG. 39, x^* X λ .

EXISTE P/ TODO $\lambda > 0$. NENHUMA MUDANÇA EM λ ACARRETA MUDANÇA DE ESTADO (S-MODE).

EXISTE P/ TODO $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$. QUALQUER MUDANÇA $\lambda = \frac{1}{4} + \epsilon$, $0 < \epsilon \rightarrow 0$, ACARRETA MUDANÇA DO T-MODE P/O S-MODE.

TAREFA: COMPARAR O DIAGRAMA DE BIF. DA FIG. 3.7 C/O DA FIG. 2.6.

SISTEMAS DINÂMICOS

MODELOS MATEMÁTICOS QUALITATIVOS ASSOCIADOS AS SOLUÇÕES (INCLUSIVE AS DE EQUILÍBRIO) DE EQS. DIFS. AUTÔNOMAS QUE MODELAM SISTEMAS COMO, POR EX., MEET E CTH.

EQ. DIF. AUT.

É UMA EDO ONDE O "TERMO DE FORÇAMENTO" f N DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO t :

$$\dot{X} = f(X) \text{ (EDA)}$$

ONDE $\dot{X} := \frac{dX}{dt}$, $X = X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ c/ D ABERTO DE \mathbb{R}^n .

EX: P/O CTH

$$\begin{cases} \dot{T}_i = c(T^* - T_i) \pm I_i q_i \Delta S, \\ \dot{S}_i = \mp H + d(\mp S^* - S_i) \pm I_i q_i \Delta S, \end{cases} \quad i=1,2$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} c(T^* - T_1) + I_1 q_1 \Delta S \\ c(T^* - T_2) - I_2 q_2 \Delta S \\ -H + d(-S^* - S_1) + I_1 q_1 \Delta S \\ H + d(S^* - S_2) - I_2 q_2 \Delta S \end{bmatrix}$$

OBS: UMA EQ. ESCALAR AUTÔN. DE ORDEM n PODE SER ESCRITA COMO UMA EDA P/:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

$$X_i := \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}, \quad i=1,2,\dots,n$$

NESTE CASO,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dots, \dot{X}_{n-1}, \dot{X}_n) \\ &= \left(\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}X_1}{dt^{n-1}}, \frac{d^n X_1}{dt^n}\right) \\ &= (X_2, X_3, \dots, X_n, g(X_1, X_2, \dots, X_n)) \\ &= f(X). \end{aligned}$$

EX: (EQ. PLANAR DO PÊNDULO)

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin x = 0. \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1. \end{cases}$$

CF. AULA 1!

$$f(x) = (x_2, -\sin x_1)$$

EX: (EQ. VAN DER POL) RELAX-Oscil. PHENOMENA IN ELECT. CIRCUITS

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \mu(1-x^2)\dot{x}, \quad \mu > 0 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1-x_1^2)x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = (x_2, -x_1 + \mu(1-x_1^2)x_2)$$

EX: (EQ. VAN DER POL) DE FATO:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \dot{X}_2 - \mu(X_1^2 \dot{X}_1 - \dot{X}_1) \\ &= -X_1 - \mu(X_1^2 - 1)\dot{X}_1 \\ &= -X_1 + \mu(1 - X_1^2)\dot{X}_1 \end{aligned}$$

OBS: PODE EXISTIR OUTRO MODO DE ESCRIVER UMA EQ. ESCALAR AUTÔN. DE ORDEM n COMO UMA EDA.

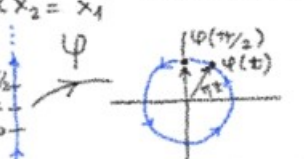
CONTINUA

SEJA $\dot{x} = f(x)$ (EDA)

DEFINIDA COMO ANT..

DEF: φ É UMA SOLUÇÃO DA (EDA) NUM INTERVALO $I \subset \mathbb{R}$ SE $\varphi: I \rightarrow D$ É DIF. E $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$

EX: $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ É SOL. DE $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \forall t \in I = \mathbb{R}$.



OBS: SEJA $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ CONTÍNUA. 9

$\forall t_0 \in \mathbb{R}$ E $\forall x_0 \in D$, EXISTE INTERVALO $I(x_0) \subset \mathbb{R}$ CONTENDO t_0 EM SEU INTERIOR E EXISTE $\varphi: I(x_0) \rightarrow D$ DIF. TAL QUE $\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \forall t \in I(x_0)$

TEO. (EXISTÊNCIA DE SOL. P/O (PVI))

EX: $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
 $\varphi(t) = x_0 e^{-(t-t_0)}$
 $\forall t \in I(x_0) = \mathbb{R}$
 É A ÚNICA SOL..

$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \int x^{-2} dx = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c$
 $c = -\frac{1}{x_0} - t_0$
 $\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - (t-t_0)x_0}$

É, P/ ENFATIZAR TAL DEPENDÊNCIA, PODEMOS DENOTAR $\varphi(t) := \varphi(t; t_0, x_0)$. NESTE CASO, $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0$. $I(x_0) = (\alpha, \beta)$ É MAXIMAL QDO $\begin{cases} \alpha < \infty \Rightarrow \nexists \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) \text{ EM } D; \\ \beta < \infty \Rightarrow \nexists \lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) \text{ " " } \end{cases}$

OBS/DEF/NOT: $I(x_0)$ DEPENDE DE x_0

É DEFINIDA P/:

- $x_0 > 0 \Rightarrow I(x_0) = (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0})$ ONDE $\nexists \lim_{t \rightarrow (t_0 + \frac{1}{x_0})^-} \varphi(t)$ EM D;
- $x_0 = 0 \Rightarrow I(x_0) = \mathbb{R}$;
- $x_0 < 0 \Rightarrow I(x_0) = (t_0 - \frac{1}{|x_0|}, +\infty)$ " " $\nexists \lim_{t \rightarrow (t_0 - \frac{1}{|x_0|})^+} \varphi(t)$ " " "

SOL. ÚNICA P/ CADA CASO!

EX: $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} \\ x(t_0) = x_0 \geq 0 \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = x^{1/2} \Rightarrow \int x^{-1/2} dx = \int dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c \Rightarrow c = 2\sqrt{x_0} - t_0$ P/ $x(t_0) = x_0$.

AQUI, $I(x_0) = \mathbb{R}$ E O (PVI) ADMITE MAIS DE UMA SOLUÇÃO. POR EX.:

$\varphi(t) = \left(\frac{t-t_0+2\sqrt{x_0}}{2}\right)^2 \forall t \in \mathbb{R}$ OU $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in (-\infty, t_0 - 2\sqrt{x_0}]; \\ \left(\frac{t-t_0+2\sqrt{x_0}}{2}\right)^2 & \forall t \in (t_0 - 2\sqrt{x_0}, +\infty). \end{cases}$

OBS: A CONTINUIDADE DE f É GARANTIA DA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES P/O

(PVI) (CF. TEO. ANT.), MAS Ñ É GARANTIA DA UNICIDADE " " (CF. EX. ANT.).

CASO f SEJA LIPSCHITZ (CONTÍNUA), TEMOS GARANTIDAS A EXIST. E A UNIC..

DEF: SEJA $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ DADA COMO NO (PVI). f É LIPSCHITZ QDO $\exists k > 0$ TAL QUE

$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$

$\forall x_1, x_2 \in D$. ($\|\cdot\|$ REPRESENTA QUALQUER NORMA EM \mathbb{R}^n .) (k É A "CTE DE LIPSCHITZ".)

OBS: f É LIPSCHITZ $\Rightarrow f$ É CONTÍNUA \Rightarrow (PVI) TEM SOL.

DE FATO, SEJAM $x_1, x_2 \in D$ E $\epsilon > 0$ ARBITRÁRIOS.

SEJA $\delta < \frac{\epsilon}{k}$. DAÍ:
 $\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| < k \delta < k \cdot \frac{\epsilon}{k} < \epsilon$

f É DIF. E $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ É CONT., $i=1, \dots, n \Rightarrow f$ É LIPSCHITZ.

CONTÍNUA

CONSIDERE, COMO DADO ANT., o

(PVI) $\begin{cases} \dot{x} = f(x); & \text{EDA} \\ x(t_0) = x_0 \\ c / t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in D. \end{cases}$

TEO. (UNICIDADE DE SOL. P/O (PVI))

" SEJAM φ E ψ SOLÇS. DA (EDA) DEFINIDAS NUM INTERVALO $I \ni t_0$. SE f É LIPSCHITZ C/ CTE (DE LIPSCHITZ) K , ENTÃO

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq e^{K|t-t_0|} \|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\|$$

$\forall t \in I$. EM PARTICULAR,

$$\varphi(t_0) = x_0 = \psi(t_0) \implies \varphi = \psi \text{ (EM } I \text{).}$$

DEF: SEJA f DEFINIDA COMO ANT. $f \in C^k$ (EM D)

QDO $f', f'', \dots, f^{(k)}$ EXISTEM E SÃO CONTÍNUAS.

EX: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} & \text{p/ } x \geq 0, \\ -\frac{x^3}{6} & \text{p/ } x < 0 \end{cases}$
 É C^2 MAS Ñ C^3 EM \mathbb{R} .

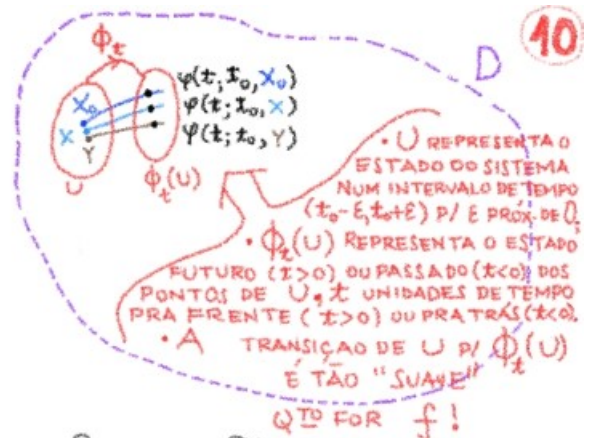
DE FATO:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & \text{p/ } x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2} & \text{p/ } x < 0 \end{cases}$$

E $f''(x) = |x|$ Ñ É DIF. EM $x=0$.

TEO. (REGULARIDADE DAS SOLUÇÕES DO (PVI) EM RELAÇÃO AS CONDIÇÕES INICIAIS)

" SEJA $f \in C^k$. FIXE $t \in I(x_0)$ ONDE $I(x_0)$ É UM INTERVALO QUE REPRESENTA O DOMÍNIO DA SOL. ÚNICA $\varphi(t; t_0, x_0)$ DO (PVI). DAI EXISTE UMA VIZINHANÇA U DE x_0 TAL QUE $\phi_t: X \mapsto \varphi(t; t_0, X)$ É C^k EM U .



OBS: COMO f Ñ DEPENDE EXPLICIT. DE t , CASO $I(x_0) \ni t \mapsto \varphi(t_0; t, x_0)$ SEJA A SOL. DO (PVI), PODEMOS TRANSLADAR $I(x_0)$ P/ UM INTERVALO EM QUE O x_0 SEJA TRANSLADADO P/O.

DAI, SEM PERDA DE GENERALIDADE, PODEMOS CONSIDERAR APENAS O

(PVI) $\begin{cases} \dot{x} = f(x); \\ x(0) = x_0 \in D. \end{cases}$

NESTE CASO, A SOL. P/ TAL (PVI) É DENOTADA POR

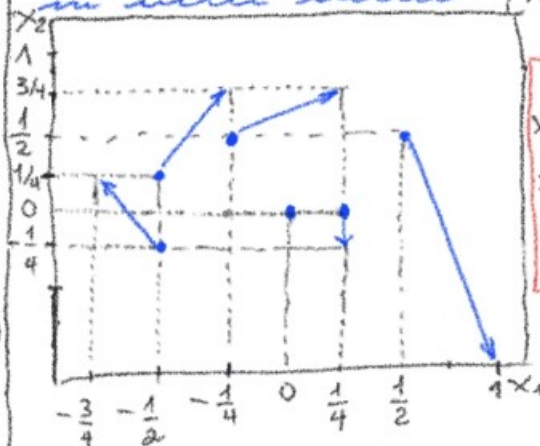
$$\varphi(t, x_0) := \varphi(t; 0, x_0).$$

GEOMETRIA DOS SISTEMAS DINÂMICOS

• CAMPO DE VETORES: P/ $\dot{x} = f(x)$

COMO DEF. ANT., CONSIDERE O VETOR C/ PTO INICIAL $x \in D$ E PTO FINAL $x + f(x)$.

EX. (OSCILADOR HARMÔNICO): $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$



NOTE QUE $x_1(t) = r \cos t$ E $x_2(t) = r \sin t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, ONDE $r \geq 0$

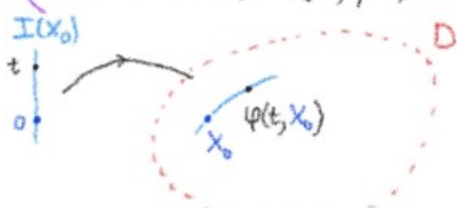
CF. FIG. 4.1, PÁG. 45.

CONT.

GEO. DOS SISTS. DIN.

RECAPITULANDO:

- **(PVI)** $\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0 \in D; \end{cases}$
- $f \in C^k$ EM $D, k=1,2,\dots;$
- $\varphi(t, x_0)$ É A SOL DO **(PVI)**, ISTO É, $\begin{cases} \dot{\varphi}(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0)) \quad \forall t \in I(x_0), \\ \varphi(0, x_0) = x_0; \end{cases}$
- $(0 \in I(x_0) = (\alpha, \beta))$

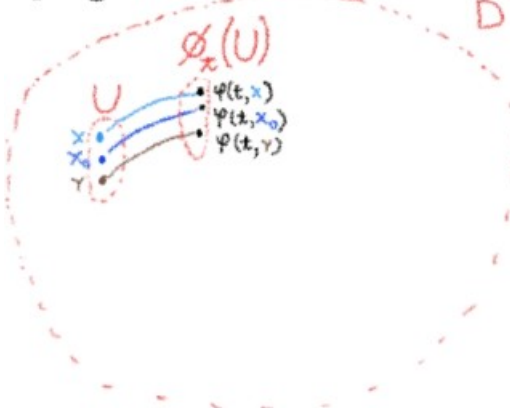


• P/ $t \in I(x_0)$ FIXO, EXISTE VIZINHANÇA U DE x_0 , CONSISTINDO DE P^{TOS} X ARBITRARIAMENTE

PRÓXIMOS DE x_0 , TAL QUE

$$x \mapsto \phi_t(x) := \varphi(t, x)$$

É C^k .



- U REPRESENTA UM CONJUNTO DE CONDIÇÕES INICIAIS ARBITRARIAMENTE PRÓXIMAS DE x_0 ;
- $\phi_t(U)$ REPRESENTA A EVOLUÇÃO TEMPORAL DOS P^{TOS} DE U , t UNIDADES DE TEMPO P/ FRENTE ($t > 0$) OU P/ TRÁS ($t < 0$);

DEF: UM SIST. DINÂMICO 11

ASSOCIADO A $\dot{x} = f(x)$ É COMPOSTO POR TAIS ϕ_t , OBTIDOS P/ CADA COND. INICIAL $x_0 \in D$ E CADA $t \in I(x_0)$.

DEF: A TRAJETÓRIA DE UM P^{TIO} $x \in D$ É O CONJ. $\{(t, \phi_t(x)) / t \in I(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

• A ORBITA DE UM P^{TIO} $x \in D$ É O CONJ.

$$\gamma(x) := \{ \phi_t(x) / t \in I(x) \} \subset \mathbb{R}^n.$$

$\phi_t(x) = \varphi(t, x)$

OBS: $\gamma(x) = \text{Im}(\varphi(t, x))$.

• $\gamma(x)$ Ñ DEPENDE EXPLICITAMENTE DE t . ASSIM É TRADICIONAL (P/ $n=2$) ILUSTRAR A PROGRESSÃO OU REGRESSÃO TEMPORAL, INSERINDO SETAS DIRECIONAIS EM ALGUNS PONTOS $\varphi(t, x)$ NAS DIREÇÕES DOS RESPECTIVOS VETORES VELOCIDADES $\dot{\varphi}(t, x)$.

X. A COLEÇÃO DE TAIS $\gamma(x)$ É ESPAÇO DE FASE DO SIST. DINÂMICO CORRESPONDENTE.

EX: CF. FIGURAS 4.2-3, PÁG. 46, P/O

OSCILADOR HARMÔNICO $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ E P/O PÊNDULO

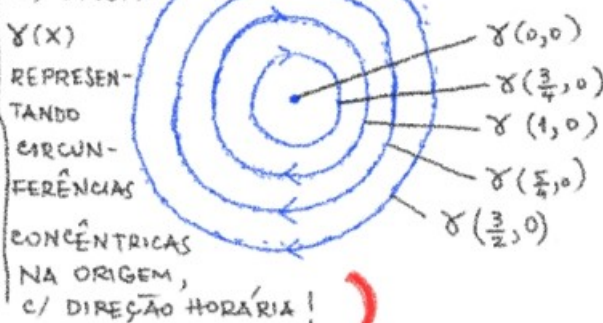
$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}$, E FIG. 6.2, PÁG. 81, P/O 2-BOX MODEL (6.4-5) DE CTH, PÁG. 78.

(EM RELAÇÃO A $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$, JÁ SABEMOS QUE

$\varphi(t) = (r \sin t, r \cos t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, c/r \geq 0$, É A SOL. ASSIM TEMOS O ESPAÇO DE

FASES

c/ ÓRBITAS



TAREFA: ANALIZAR DEFINIÇÕES

4.3-5 E FIG. 4.4, PÁGINAS 46-7.

DEF: CONSIDERE A DEF. DE SIST. DIN. DADO NA PÁG. ANT. UM PTO CRÍTICO DE TAL SIST. É UM PTO X^* E D TAL QUE

$\phi_t(X^*) = X^* \quad \forall t$ ADMISSÍVEL.

$\phi(t, X^*) \rightarrow$ A SOL. DO PVI
 $\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(0) = X^* \end{cases}$
 E' CTE.

$\dot{\phi}(t, X^*) = 0 \quad \forall t \in I(X^*)$
 $f(\phi(t, X^*)) = 0 \quad \forall t \in I(X^*)$

EX: OS PTOs DE EQUILÍBRIO P/O MEET E P/O CTH REDUZIDO A UMA ÚNICA VAR. (AS).

(VIMOS QUE TALS PTOs DE EQ. PODEM SER ESTÁVEIS OU INSTÁVEIS!)

DEF: SEJA X^* UM PTO CRÍTICO COMO DEFINIDO ACIMA. X^* É:

• (LIAPUNOV) ESTÁVEL QDO, P/ QUALQUER VIZINHANÇA V DE X^* , AINDA QUE ARBITRARIAMENTE PEQUENA, EXISTE UMA VIZ.

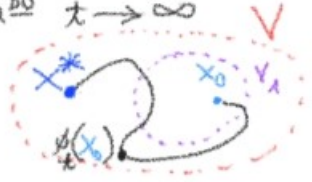
$V_1 \subset V$ E EXISTE UM INSTANTE DE TEMPO $T > 0$ TAL QUE:

$X_0 \in V_1 \Rightarrow \phi_t(X_0) \in V \quad \forall t \geq T$



• INSTÁVEL QDO Ñ É ESTÁVEL;
 • ASSINTÓTICAMENTE ESTÁVEL QDO É ESTÁVEL E A V_1 ANT. PODE SER ESCOLHIDA TAL QUE

$\phi_t(X_0) \rightarrow X^* \quad$ QDO $t \rightarrow \infty$
 $\forall X_0 \in V_1$.



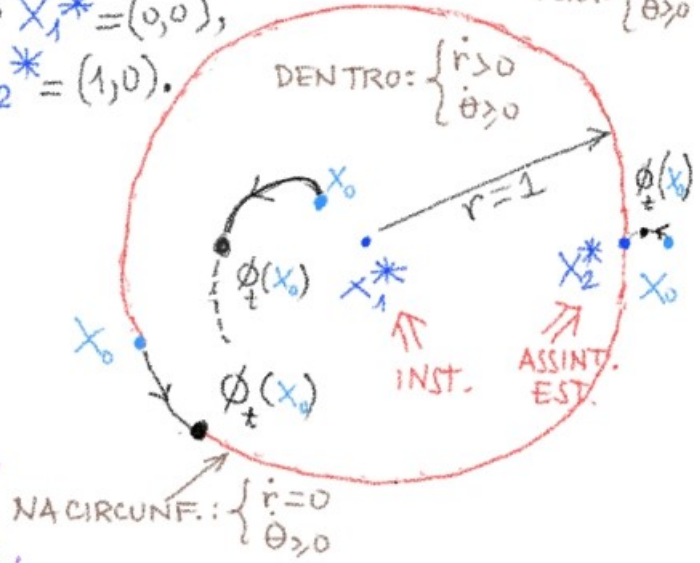
EX: CF. AS SOLCS. DE EQUIL. P/O CTH REDUZIDO A UMA ÚNICA VAR.

EX: $\begin{cases} \dot{r} = (1-r)r \\ \dot{\theta} = \sin^2(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$

$\therefore X_1^* = (0,0),$
 $X_2^* = (1,0).$

FORA: $\begin{cases} \dot{r} < 0 \\ \dot{\theta} > 0 \end{cases}$

DENTRO: $\begin{cases} \dot{r} > 0 \\ \dot{\theta} > 0 \end{cases}$



NA CIRCUNF.: $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} > 0 \end{cases}$

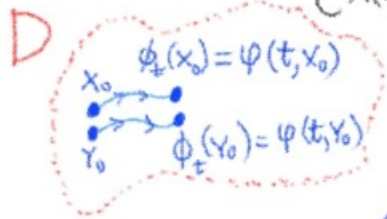
COMO VISTO ANT., ESTUDAREMOS A ESTABILIDADE/INSTABILIDADE DE PTOs CRÍTICOS X^* LINEARIZANDO $\dot{X} = f(X)$ EM TORNO DE X^* E ANALIZANDO O ESPAÇO DE FASE DO SIST. LINEARIZADO NUMA VIZINHANÇA SUFICIENTEMENTE PEQUENA DE TAL PTO CRÍTICO!

RECAPITULANDO:

• UM SIST. DIN. ASSOCIADO A EDO $\dot{X} = f(X)$ (ONDE $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ É C^k E D É ABERTO EM \mathbb{R}^n) É UMA FAMÍLIA $\phi = \{\phi_t\}_t$

(INDEXADA NUM CONJUNTO DE N^{OS} REAIS t QUE SEJAM ADMISSÍVEIS) ONDE CADA

$X_0 \xrightarrow{\phi_t} \phi_t(X_0) := \varphi(t, X_0)$ É C^k E $\varphi(t, X_0): I(X_0) \rightarrow D$ É A SOL. DO PVI $\begin{cases} \dot{X} = f(X), \\ X(0) = X_0 \in D. \end{cases}$



• $D \ni X^*$ É P^{TO} FIXO P/ $\phi = \{\phi_t\}_t$ Q^{DO} $f(X^*) = 0$, ISTO É, $\phi_t(X^*) = \varphi(t, X^*) = X^* \forall t \in I(X^*)$.

TAL X^* PODE SER ESTÁVEL, ASSINT. EST. OU INSTÁVEL. (CONFIRA 12)



DINÂMICA PRÓXIMA DE X^*

• SEJA X^* ISOLADO, ISTO É,

13

$\exists r > 0$ TAL QUE EM $\{X \in \mathbb{R}^n / \|X - X^*\| < r\}$

NÃO EXISTEM OUTROS P^{TOS} FIXOS DE ϕ . $\hookrightarrow := B(X^*, r)$ NOT

"BOLA ABERTA DE CENTRO X^* É RAIO^R."



DENTRO DESTA "BOLA" O ÚNICO P^{TO} FIXO DE ϕ É O X^* !

• NESTE CASO PODEMOS ANALISAR "ÓRBITAS" (CF. 11) PRÓXIMAS DE X^* LINEARIZANDO $f(X)$ EM TORNO DE X^* , CASO f SEJA NO MÍN. C^2 NUMA VIZ. DE X^* :

$$\dot{X} = f(X)$$

$$= Df(X^*)(X - X^*) + g(X) \quad \text{(EXP. DE TAYLOR EM TORNO DE } X^*)$$

$$Df(X^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^*) \right)_{i,j=1}^n$$

(MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DE f EM $X = X^*$)

$$f(X) - Df(X^*)(X - X^*) = \leftarrow$$

(TERMOS DE ORDEM NO MÍN. 2)

• P/ $X \rightarrow X^*$, $g(X)$ É DESPREZÍVEL:

$$\dot{X} = A(X - X^*) \quad \hookrightarrow = Df(X^*)$$

• P/ $\bar{X} = X - X^*$,

$$\dot{\bar{X}} = \dot{X} = A\bar{X}. \quad (+)$$

• P/ EVITAR CASOS DEGENERADOS, ASSUMA $\det A \neq 0$, ISTO É, $\exists A^{-1}$.

PORTANTO X^* FOI TRANSLADADO P/A ORIGEM QUE É O ÚNICO P^{TO} FIXO P/ (+):

$$A\bar{X} = 0 \iff \bar{X} = 0.$$

• POR ABUSO DE NOTACÃO, ESCREVA (+) COMO $\dot{X} = AX$. CONTINUA

RESUMINDO: P/ CADA PTO CRÍTICO X^* ISOLADO DO SIST. DIN. ϕ ASSOCIADO A

$$\dot{X} = f(X), \text{ (I)}$$

ANALISAREMOS A DINÂMICA DAS ÓRBITAS DE ϕ PRÓXIMAS DE X^* VIA A DINÂMICA DAS ÓRBITAS DO SIST. DIN. ASSOC. A LINEARIZAÇÃO DE (I),

$$\dot{X} = AX, \text{ (II)}$$

PRÓXIMAS DA ORIGEM. $\nabla_x f = Df(X^*)$ INVERTÍVEL

ESTUDO DE (II)

A SOL. GERAL DA EDU ESCALAR $\dot{x} = ax$ E $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) = x_0 e^{at}$

ONDE $x_0 = x(0)$ E $e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 + \dots$

O MESMO MÉTODO VALE P/ (II):

$$e^{tA} := I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \frac{1}{3!} t^3 A^3 + \dots \text{ (III)}$$

ONDE:

- I É A IDENTIDADE DE $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- $A^k = \underbrace{A \dots A}_k$ FATORES;
- (III) CONVERGE EM $\mathbb{R}^{n \times n}$ VISTO COMO ISOMORFO A \mathbb{R}^{n^2} MUNIDO DE QUALQUER NORMA $\|\cdot\|$ EQUIVALENTE A CANÔNICA; (A CONVERGÊNCIA SE DÁ DA MESMA FORMA QUE $e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} a^i t^i$ CONVERGE EM \mathbb{R} !)
- $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$;
- $AB = BA \implies e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$;
- DERIVANDO (III), TERMO A TERMO, EM RELAÇÃO A t , TEMOS:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

EM PARTICULAR A SOL. GERAL DE (II) É DADA POR:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) = e^{tA} x_0$$

ONDE

$$X(0) = x_0.$$

\therefore O SIST. DIN. $\phi = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ ASSOCIADO A (II) É TAL QUE

$$\phi_t = e^{tA},$$

ISTO É,

$$\mathbb{R}^n \ni x_0 \mapsto \phi_t(x_0) = e^{tA} x_0.$$

OBS: SEJAM $J, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TAIS QUE P É INVERTÍVEL E

$$A = PJP^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \therefore A^i &= \underbrace{AA \dots AA}_i \text{ FATORES} \\ &= PJP^{-1}PJP^{-1} \dots PJP^{-1}PJP^{-1} \\ &= PJ^i P^{-1}. \end{aligned}$$

$$\therefore e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i A^i$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i (PJP^{-1})^i \\ &= P \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i J^i \right) P^{-1} \\ &= P e^{tJ} P^{-1}. \end{aligned}$$

DAÍ, POR EX., SE A É DIAGONALIZÁVEL E

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{ZEROS} \\ & \lambda_2 & \\ \text{ZEROS} & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= P \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \lambda_2^i & \\ 0 & & \dots & \lambda_n^i \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \text{ZEROS} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \text{ZEROS} & & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

NESTE CASO, SE CADA AUTOVAL. DE A FOR NEGATIVO, ISTO É, $\lambda_k < 0, k=1, 2, \dots, n$,

A ORIGEM É UM PTO FIXO (CRÍTICO) ASSINTÓTICAMENTE ESTÁVEL P/O SIST. DINÂMICO ASSOCIADO A $\dot{X} = AX$.



DE FATO, P/ CADA $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} x_0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \text{ZEROS} \\ \text{ZEROS} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \right] x_0 = 0$$

$$\left[P \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 t} & \text{ZEROS} \\ \text{ZEROS} & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \right] x_0 = 0$$

$$\left[P \begin{pmatrix} 0 & \text{ZEROS} \\ \text{ZEROS} & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right] x_0 = \text{VETOR NULO.}$$

MATRIZ NULA

CASO PLANAR
($n=2$)

$$\begin{cases} J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}, e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{cases}$$

• SUBCASO $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

ÓRBITAS DE $\dot{Y} = JY$: $Y(t) = e^{tJ} Y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} y_{0,1} e^{\lambda_1 t} \\ y_{0,2} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad c/ \quad y_0 \neq 0.$$

SUBCASO $\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

$$|y_1|^{\lambda_2} = C |y_2|^{\lambda_1}$$

ÓRBITAS SÃO CURVAS NO PLANO (y_1, y_2) SEMELHANTES A PARÁBOLAS!

DEM. P/ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$:

$$\begin{aligned} |y_1|^{\lambda_2} &= |y_{0,1} e^{\lambda_1 t}|^{\lambda_2} \\ &= |y_{0,1}|^{\lambda_2} e^{-|\lambda_1| \lambda_2 t} \\ &= |y_{0,1}|^{\lambda_2} |e^{-|\lambda_2| t}|^{\lambda_1} \\ &= \frac{|y_{0,1}|^{\lambda_2}}{|y_{0,2}|^{\lambda_1}} |y_{0,2} e^{\lambda_2 t}|^{\lambda_1} \\ &= C |y_2|^{\lambda_1} \end{aligned}$$

DEM. P/ $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ É ANALOGA!

(SUPONHA S) PERDA DE GENERAL. $y_{0,2} \neq 0$!

SUBCASO $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: $(0,0)$ "ATRATOR" POSITIVO
 || $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: $(0,0)$ "ATRATOR" NEGATIVO
 (CF. FIG. 4.7, PÁG. 54) \rightarrow NO EST. \rightarrow NO INST.

OBS:
 • TODAS AS ÓRBITAS SE APROXIMAM (RESP., AFASTAM) DO NÓ EST. (RESP., INST.) TANGENCIALMENTE AO AUTOESPAÇO ASSOCIADO À λ_2 , DITO UMA "VARIEDADE LENTA", C/ EXCEÇÃO DA ÓRBITA AO LONGO DO AUTOESP. ASSOC. À λ_1 , DITO UMA "VARIEDADE RÁPIDA".

• OS AUTOESPAÇOS SÃO "INVARIANTES" EM RELAÇÃO AO SIST. DIN., SEMPRE!

SUBCASO $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: ÓRBITAS SÃO CURVAS NO PLANO (y_1, y_2) DA FORMA $|y_1|^{\lambda_2} |y_2|^{\lambda_1} = C$

SEMELHANTES A HIPÉRBOLAS! $(0,0)$ É UM PTO FIXO (INST.) DITO "HIPERBÓLICO"!

\rightarrow PTO DE SELA! (CF. FIG. 4.8, PÁG. 54) CONT.

OBS: P/O SUBCASO $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, O AUTOESP. ASSOCIADO AO AUTOVAL. NEGATIVO (RESP., POS.) É DENOTADO POR E^s (RESP., E^u) E DITO UMA VARIEDADE ESTÁVEL (RESP., INSTÁVEL).
 COMO DITO ANT., TAIS VARIEDADES SÃO INVARIANTES PELO SIST. DIN. e^{tA} , ISTO É, CASO X_0 SEJA UMA CONDIÇÃO INICIAL PERTENCENTE A E^s (RESP., E^u), $e^{tA} X_0$ TAMBÉM PERTENCE A E^s (RESP., E^u). DE FATO:
 $X_0 \in E^s$ (RESP., E^u) $\Rightarrow A X_0 = \lambda X_0$ c/ $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$
 $\Rightarrow A^k X_0 = \lambda^k X_0$
 $\Rightarrow e^{tA} X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k X_0$
 $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} X_0$
 $= e^{\lambda t} X_0 \in E^s$ (RESP., E^u)

$$\begin{aligned} \therefore e^{tJ} &= e^{t(\alpha I + \beta B)} \\ &= e^{\alpha t I} e^{\beta t B} \\ &= \sum \frac{(\alpha t)^k}{k!} I^k \sum \frac{(\beta t)^k}{k!} B^k \\ &= e^{\alpha t} I \left(I + \beta t B - \frac{(\beta t)^2}{2!} I - \frac{(\beta t)^3}{3!} B + \frac{(\beta t)^4}{4!} I + \frac{(\beta t)^5}{5!} B - \dots \right) \\ &= e^{\alpha t} \left(\left(1 - \frac{(\beta t)^2}{2!} + \frac{(\beta t)^4}{4!} - \dots \right) I + \left(\beta t - \frac{(\beta t)^3}{3!} + \frac{(\beta t)^5}{5!} - \dots \right) B \right) \\ &= e^{\alpha t} (\cos \beta t I + \sin \beta t B) \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CASO PLANAR
(n=2)

AUTOVALS DE A COMPLEXOS CONJUGADOS.

SUBCASO $\alpha = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_T \lambda + \underbrace{ad-bc}_D$$

$\therefore \Delta = T^2 - 4D$

- $< 0 \Rightarrow$ CASO $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
- $= 0 \Rightarrow$ " " " $\lambda_1 = \lambda_2$
- $> 0 \Rightarrow$ " " $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

SOLÇS. DE $\dot{Y} = JY$ (RESP., $\dot{X} = AX$) SÃO CIRCUNFERÊNCIAS (RESP., ELIPSES) DE "CENTRO" (0,0) NO SENTIDO ANTIHOR. ($\beta > 0$) OU HOR. ($\beta < 0$). (CF. FIG. 4.10, PÁG. 55)

$$\lambda = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$i^2 = -1$

$$\begin{cases} \alpha + i\beta = \lambda_1 \\ \alpha - i\beta = \lambda_2 \end{cases}$$

$\alpha = \frac{T}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

SUBCASO $\alpha \neq 0$:

SOLÇS DE $\dot{Y} = Jx$ SÃO ÓRBITAS QUE ESPIRALAM P/ (RESP., DA) ORIGEM SE $\alpha < 0$ (RESP., > 0). A ORIGEM É DITA UM FOCO. (CF. FIG. 4.9, PÁG. 55)

NESTE CASO:

$$\begin{cases} e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}, J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}; \\ e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \end{cases}$$

CASO PLANAR
(n=2)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
c/ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

ISTO É, \mathbb{R}^2 TEM BASE DE AUTOVET. DE SUBCASO A DIAGONALIZAVEL: A.

$A = J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. DE FATO:
 $A = P J P^{-1}$
 $= P(\lambda I) P^{-1}$
 $= \lambda P P^{-1}$
 $= \lambda I$

DEM.:

$J = \alpha I + \beta B$ c/ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

NOTE QUE:

$B^2 = -I, B^3 = -B, B^4 = I, B^5 = B, B^6 = -I, B^7 = -B, B^8 = I, B^9 = B, \dots$

CONTINUA

• $x_0 \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x_0$ É AUTOVET. DE \tilde{A} (ASSOC. A λ).

(D) $Ax_0 = \lambda [x_0 = \lambda x_0.]$

Por outro lado, a reta que passa pela origem na direção de x_0 é invariante por e^{tA} .

(D)
$$e^{tA} x_0 = e^{tJ} \lambda I x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} I^k x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} I x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} x_0 = e^{\lambda t} x_0$$
 É UM MÚLT. ESCALAR DE x_0 .

∴ AS ÓRBITAS DE $\dot{X} = AX$ OU $\dot{Y} = JY$ SÃO RETAS QUE PASSAM PELA ORIGEM E:

$\lambda < 0$ (RESP., > 0) $\Rightarrow (0,0)$ É "NO ESTRELADO" ATRATIVO (RESP., REPULSIVO)



ISTO É, \mathbb{R}^2 TEM BASE DE AUTOVET. DE \tilde{A} ! SUBCASO \tilde{A} É DIAGONALIZÁVEL:

• NESTE CASO, $e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}$

c/ $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

NOTE QUE: $J^0 = I, J^1 = J, J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \dots$

∴ $e^{tJ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k$

17

$$= I + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^k \lambda^k}{k!} & 0 \\ \frac{t^k \lambda^{k-1}}{k!} & \frac{t^k \lambda^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow t \frac{t^{k-1} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix};$$

• $(0,0)$ É UM "NO DEGENERADO" ATRATIVO (RESP., REPULSIVO) P/ $\lambda < 0$ (RESP., $\lambda > 0$). NESTE

CASO AS ÓRBITAS SE APROXIMAM (RESP., AFASTAM) DE $(0,0)$ TANGENCIALMENTE A E^s (RESP., E^u), QUE É O AUTESP. DE A ASSOCIADO A λ . (NOTE QUE TAL AUTOESP. É UNIDIMENSIONAL!)

(CF. FIG. 4.11, P. 56.)

CONTINUA



TEORIA DE BIFURCAÇÕES
A EDO (AUTÓN.)

BIFURCAÇÃO

OCORRE QUANDO O SIST. DIN. ASSOCIADO

$$\dot{X} = f(\lambda, X) \quad (*)$$

APRESENTA UMA MUDANÇA QUALITATIVA NO SEU ESPAÇO DE FASE (ESPAÇO DAS ÓRBITAS) P/ $\lambda = \lambda_0$.

EX: A QUANTIDADE OU A ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO X^* DE $(*)$ SÃO ALTERADAS P/ $\lambda = \lambda_0$. (CF. MEET E CTH P/ EXS.)

OBS:

- λ REPRESENTA UM OU MAIS PARÂMETROS: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ONDE k PODE SER = 1.
- COMO ANTES, X^* SÃO OBTIDAS FAZENDO $f(\lambda, X) = 0$.
- A EXISTÊNCIA E A ESTABILIDADE DE X^* AGORA TAMBÉM DEPENDEM DE λ .

POR ENQUANTO, POR SIMPLICIDADE, CONSIDERE $(*)$ ESCALAR:

$$\dot{x} = f(\lambda, x) \quad (*')$$

∴ SE

$$\varphi: t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}$$

É SOL. DE $(*)'$,

$$\dot{\varphi}(t) = f(\lambda, \varphi(t))$$

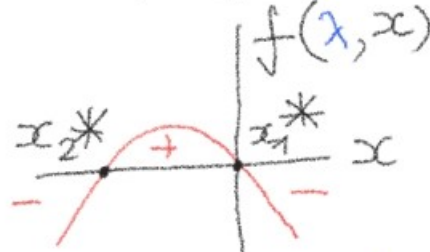
∀ t ADMISSÍVEL.

BIFURCAÇÃO TRANSCRÍTICA

EX: $f(\lambda, x) = \lambda x - x^2 = x(\lambda - x)$
 $\therefore f(\lambda, x) = 0 \Rightarrow x^* \in \{0, \lambda\}$

CASO 1: $\lambda < 0$

AQUI, $x_2^* < x_1^*$.

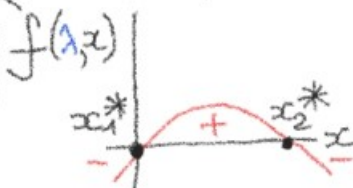


- $\varphi(t) < x_2^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi(t)$ DECRESC.;
- $\varphi(t) \in (x_2^*, x_1^*) \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) > 0 \Rightarrow \varphi(t)$ CRESC.;
- $\varphi(t) > x_1^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi(t)$ DECRESC..

∴ x_1^* É EST. E x_2^* É INST.

CASO 2: $\lambda > 0$

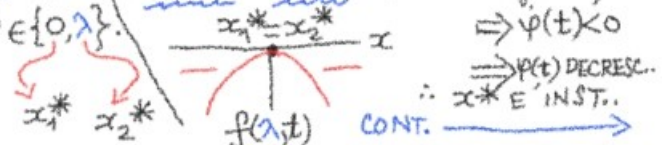
AQUI, $x_1^* < x_2^*$.



- $\varphi(t) < x_1^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi$ DECRESCENTE;
- $\varphi(t) \in (x_1^*, x_2^*) \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) > 0 \Rightarrow \varphi$ CRESCENTE;
- $\varphi(t) > x_2^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi$ DECRESCENTE.

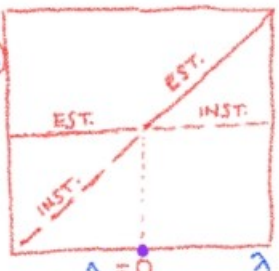
∴ x_1^* É INST. E x_2^* É EST.

CASO 3: $\lambda = 0$



$\varphi(t) < x^* \Rightarrow f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) < 0 \Rightarrow \varphi(t)$ DECRESC.
 $\therefore x^*$ É INST. CONT. →

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO



GRÁFICOS DE
 $x_1^*: \lambda \mapsto x_1^*(\lambda) = 0$
 $x_2^*: \lambda \mapsto x_2^*(\lambda) = \lambda$

DEF: PARTES DO DIAG. DE BIF. ONDE $x^* = x^*(\lambda)$ SÃO OS "RAMOS DE SOLUÇÕES", ISTO É,

EX: P/A BIF. TRANSC. ANT.:
 $\{(\lambda, x^*) / x^* = 0, \lambda < 0\} \cup \{(\lambda, x^*) / x^* = \lambda, \lambda < 0\}$
 $\cup \{(\lambda, x^*) / x^* = 0, \lambda > 0\} \cup \{(\lambda, x^*) / x^* = \lambda, \lambda > 0\}$

UM "RAMO DE SOL." É UM SUBCONJ. DE

$$\{(\lambda, x) / f(\lambda, x) = 0\}$$

QUE PODE SER ESCRITO DA FORMA

$$\{(\lambda, g(\lambda)) / \lambda \in (a, b)\}$$

c/g SUAVE EM (a, b).

OBS: A EXISTÊNCIA DE TAL g DECORRE DO "TEO. DA Fc. IMPLÍCITA" P/ P.TOS SUFIC. PRÓXIMOS DE (λ, x^*) TAIS QUE

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) \neq 0. \end{cases}$$

ALÉM DISSO, RAMOS DE SOLÇS. PODEM SE INTERCEPTAR QDO:

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = 0. \end{cases}$$

P.TOS (λ, x^*) ONDE TAL CONDIÇÃO OCORRA SÃO CANDIDATOS A P.TOS DE BIF.!

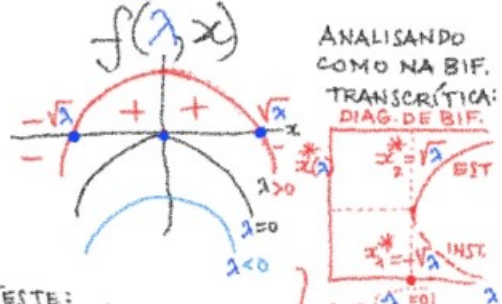
EX: P/A BIF. TRANSC. ANT.:
 $\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = \lambda - 2x^* = 0 \end{cases}$
 P/ $(\lambda, x^*) = (0, 0)$

BIFURC. NO-SELA

EX: $f(\lambda, x) = \lambda - x^2$

SEJA $f(\lambda, x) = 0$.

$$\therefore \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow \nexists x^*; \\ \lambda = 0 \Rightarrow x^* = 0; \\ \lambda > 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{\lambda}. \end{cases}$$



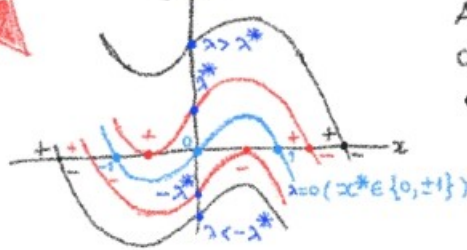
TESTE:
 $\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = -2x^* = 0 \end{cases}$
 QDO $(\lambda, x^*) = (\lambda, 0) \forall \lambda > 0$

RAMOS DE SOLÇS $\{(\lambda, -\sqrt{\lambda}) / \lambda > 0\} \cup \{(\lambda, \sqrt{\lambda}) / \lambda > 0\}$

CONT. →

BIFURCAÇÕES
"HYSTERESIS"

EX: $f(\lambda, x) = \lambda + x - x^3$



- $f(\lambda, x) = 0$ PODE ACARRETAR UMA, DUAS OU TRÊS SOLUÇÕES DE EQUIL. x^*
- $\exists \lambda^*$ TAL QUE:
 - $\rightarrow \lambda < -\lambda^*$ ou $\lambda > \lambda^* \Rightarrow (+)$ TEM UMA x^*
 - $\rightarrow \lambda = \pm \lambda^* \Rightarrow (+)$ TEM DUAS x^*
 - $\rightarrow \lambda \in (-\lambda^*, \lambda^*) \Rightarrow (+)$ " TRÊS "

21

"CANDIDATOS" P/ P^{TOS} DE BIFURCAÇÕES $\pm (\lambda^*, x^*)$:

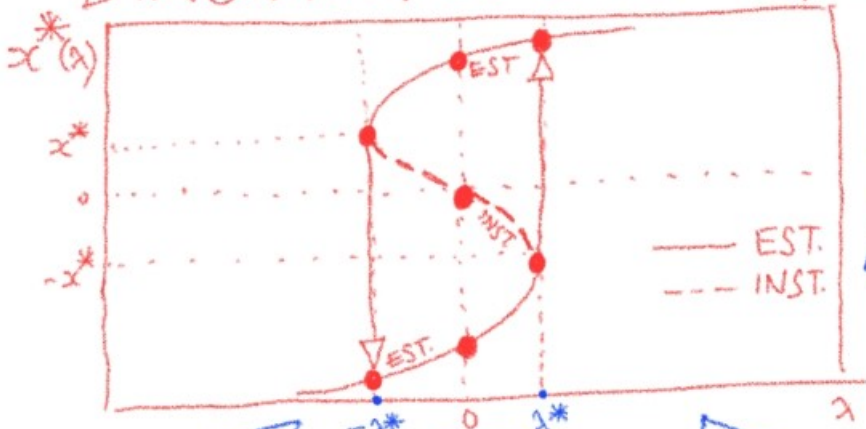
$$\begin{cases} f(\lambda, x) = \lambda + x - x^3 = 0 \Rightarrow \lambda = x^3 - x \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

•• $\lambda = \frac{+1}{3\sqrt{3}} - \left(\frac{+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{+1-3}{3\sqrt{3}} = -\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{27}} \approx -0,385$

•• $x^3 - x - \lambda = 0 \Rightarrow x^3 - x - \left(-\sqrt{\frac{4}{27}}\right) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$
(DE FATO: $+\frac{1}{\sqrt{27}} - \frac{3}{\sqrt{27}} + \frac{2}{\sqrt{27}} = 0!$)

DE FATO, PODE SER VERIFICADO QUE $\lambda^* = \sqrt{\frac{4}{27}} = x^* = \sqrt{\frac{1}{3}}!$

DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO



COMO FIZEMOS P/ AS BIFURCAÇÕES TRANSC. E NO-SELA, ESTUDANDO O SINAL DE $f(\lambda, x)$ PRÓX. DE x^* , PODEMOS DETERMINAR A ESTABILIDADE DE x^*

VIMOS TAL COMPORTAMENTO QDO ESTUDAMOS O MEET c/ EQUILÍBRIOS MÚLTIPLOS ONDE λ LA' ERA Q/Q_0 (CTE SOLAR!)

O "SALTO" DO λ ULTRAPASSANDO P/ A ESQ. (RESP., DIR.) λ^* (RESP., λ^*) É CONHECIDO COMO "HYSTERESIS!"

TAREFA: ESTUDAR BIFURCAÇÕES FORQUILHA (PITCHFORK) E "CUSP", § 5.2.4-5

CONT. →

BIFURCAÇÕES DE CAMPOS VETORIAIS PLANARES

$\dot{X} = f(\lambda, X)$
 $C/ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

EX: $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{cases}$

P^{TOS} FIXOS, ISTOE,
 $X^* p/ f(\lambda, X^*) = 0$

$\begin{cases} \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 x_2 = \lambda$

$\lambda - x_1^2 + \lambda = 0$

$x_1 = \pm \sqrt{2\lambda}$
 $p/ \lambda > 0$

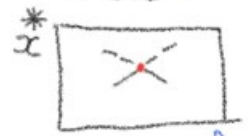
$x_2 = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda}}$
 $= \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda}$

$\therefore X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{2\lambda} \\ \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda} \end{bmatrix}$

(NOTE QUE OS RAMOS DE SOLUÇÕES SE INTERCEPTAM P/ $\lambda = 0$!)

COMO VISTO EM AULAS PASSADAS, RAMOS DE SOLÇS PODEM SE ENCONTRAR EM P^{TOS} (λ, x^*)

TAIS QUE $\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = 0 \end{cases}$



TAIS P^{TOS} SÃO "CANDIDATOS" P/ P^{TOS} DE BIF.
 AGORA, P/ $f(\lambda, X)$ PLANAR,

OS POSSÍVEIS P^{TOS} DE BIF. PODEM SER OBTIDOS VIA

$\begin{cases} f(\lambda, X) = 0, \\ \det(Df(\lambda, X)) = 0. \end{cases}$

LINEARIZANDO $f(\lambda, X)$:

$Df(\lambda, X^*) = \begin{pmatrix} -2x_1^* + x_2^* & x_1^* \\ 2x_1^* & -2x_1^* \end{pmatrix}$

$\therefore \det(Df(\lambda, X^*)) = 2(x_1^*)^2$

$= 4\lambda$ SE ANULA

$x_1^* = \pm \sqrt{2\lambda}$

APENAS P/ $\lambda = 0$, ISTO É, APENAS P/

$(x_1^*, x_2^*) = \pm \left(\sqrt{2\lambda}, \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda} \right) = (0, 0)$

GEOMETRIA DO ESPAÇO DE FASE DEPENDENDO DE λ :

SEJAM T E D COMO NA SEÇÃO 4.6.

DAÍ:

$T = \text{TRACO}(Df(\lambda, X^*)) = -4x_1^* + x_2^* = -4(\pm \sqrt{2\lambda}) + (\pm \frac{1}{2} \sqrt{2\lambda}) = \pm \frac{7}{2} \sqrt{2\lambda} > 0$

$D = \det(Df(\lambda, X^*)) = 4\lambda > 0$

$E \quad T^2 - 4D = \left(\frac{49}{2} - 16\right)\lambda > 0 \quad \text{CONT.} \rightarrow$

∴ COMO $D > 0$, OS AUTOVALS

$$T \pm \sqrt{T^2 - 4D}$$

DE $Df(\lambda, X^*)$ SÃO REAIS DE MESMO SINAL E OS P^{TOS} CRÍTICOS SÃO NÓS:

$\begin{cases} X_+^* \text{ É ESTÁVEL } (T < 0); \\ X_-^* \text{ II INST. } (T > 0). \end{cases}$

(CF. FIG. 4.1.2, PÁG. 57)

EX. DE BIF. DE HOPE

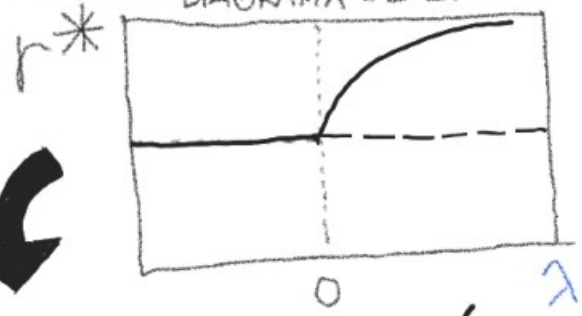
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1. \end{cases}$$

$$\therefore f(\lambda, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2 = 0, \\ x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 + y^2 = r^2 &\Rightarrow r^2(\lambda - r^2) = 0. \\ \therefore \text{PTOS FIXOS:} &\begin{cases} r^* = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\ r^* = 0 \text{ É ÚNICO P/ } \lambda < 0; \\ r^* \in \{0, \sqrt{\lambda}\} \text{ P/ } \lambda > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$r \geq 0 \Rightarrow \tilde{N}$ CONSIDERE A RAIZ < 0

DIAGRAMA DE BIF.



A ESTABILIDADE É OBTIDA VIA:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ \theta = \arctan(x_2/x_1). \end{cases} \quad (\text{COORDS POLARES})$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt}((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} (2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) \\ &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \cdot (x_1^2 + x_2^2)(\lambda - x_1^2 - x_2^2) = \frac{r^2(\lambda - r^2)}{r} \\ \therefore \dot{r} &= \lambda r - r^3 \end{aligned}$$

POR OUTRO LADO,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{d}{dt}(\arctan(x_2/x_1)) \\ &= \frac{1}{1+(x_2/x_1)^2} \cdot \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{-x_1 - x_2}{x_1^2} = -1. \end{aligned}$$

∴ $\theta(t) = -t + CTE.$

DAÍ, VOLTANDO P/ COORDS. CARTESIANAS,

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta, \\ x_2 = r \sin \theta, \end{cases}$$

TEMOS $X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$

$$= \sqrt{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(-t + CTE) \\ \sin(-t + CTE) \end{bmatrix}$$

E A ORIGEM P/ $\lambda = 0$ (TAMBÉM JÁ SABEMOS SER A ORIGEM P/ $\lambda < 0$) É UMA CIRCUNF. (ÓRBITA FECHADA) DE CENTRO NA ORIGEM E RAIO $\sqrt{\lambda}$.

P/ ANALISAR AS ÓRBITAS PRÓXIMAS AS SOLÇS DE EQUIL., LINEARIZE $f(\lambda, X)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= Df(\lambda, X^*) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ TEM} \end{aligned}$$

DOIS AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS:

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4(\lambda^2 + 1)}}{2} = \lambda \pm i.$$

P/ $X^* = (0, 0)$, CF. SEÇÃO 4.6.2.

P/ $X^* = \sqrt{\lambda}(\cos(t + CTE), \sin(t + CTE))$.

CF. FIG. 5.8, PÁG. 73.

← BIF. FORQUILHA, PÁGS. 67-8

DE VOLTA AO
 "2-BOX MODEL"
 P/A

(ITU) $\begin{cases} \dot{T}_1 = c(-T_1^* - T_1) + 191\Delta T, \\ \dot{T}_2 = c(T_2^* - T_2) - 191\Delta T, \\ \dot{S}_1 = -H + d(-S_1^* - S_1) + 191\Delta S, \\ \dot{S}_2 = H + d(S_2^* - S_2) - 191\Delta S. \end{cases}$

$q = b(\alpha\Delta T - \beta\Delta S)$,
 FLUXO NO "CANO DE CAPILARIDADE"
 QUE CONECTA A CAIXA 1 (POLAR
 A DIR.) A CAIXA 2 (TROPICAL
 A ESQ.), COMPENSADO c/o
 FLUXO NO "CANO DE TRANSBOR-
 DAMENTO" QUE CONECTA A
 CX. 2 A CX. 1.;

• H = FLUXO VIRTUAL DE SAL
 NA SUPERFÍCIE P/ COMPENSAR
 EVAPORAÇÃO NA CX. 2 (↓),
 PRECIPITAÇÃO " " 1 (↑) E
 TROCA c/ CONTINENTES;
 • T_i^* E S_i^* SÃO "ANOMALIAS"

$L \rightarrow S_i^* = S_i - S_0^*$
 $L \rightarrow T_i^* = T_i - T_0^*$
 DE TEMP. E SALIN., $i=1,2$,
 b, α, β, c, d SÃO CTES POS.;

ESCALAS
 TEMPORAIS
 CONT. TERMAL,
 EXP. SALINA,
 CTE HIDRAULICA

• $T_0^* = \frac{T_1^* + T_2^*}{2}$ E $S_0^* = \frac{S_1^* + S_2^*}{2}$:
 TEMPERATURA E SALINIDADE
 DE EQUILÍBRIO DAS "BACIAS"
 QUE CERCAM AS CAIXAS;

• $T_2^* = T_2^* - T_0^*$
 $= T_2^* - \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*)$
 $= \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*)$
 $:= T^*$,

$T_1^* = T_1^* - T_0^*$
 $= T_1^* - \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*)$
 $= \frac{1}{2}(T_1^* - T_2^*)$
 $= -T^*$

$S_2^* = S^*$ E $S_1^* = -S^*$

SÃO AS ANOMALIAS DE TEMP. E SAL.
 DAS BACIAS QUE CERCAM AS CXS..

OBS: $H=0$ (STOMMEL, 1961, CONSIDEROU
 APENAS TROCAS DE SAL. (E TEMP.) c/
 BACIAS. $\therefore d > 0$ (E $c > 0$).)

\therefore (CTH) FICA (ITU) $\begin{cases} \dot{T}_1 = c(-T_1^* - T_1) + 191\Delta T, \\ \dot{T}_2 = c(T_2^* - T_2) - 191\Delta T, \\ \dot{S}_1 = d(-S_1^* - S_1) + 191\Delta S, \\ \dot{S}_2 = d(S_2^* - S_2) - 191\Delta S. \end{cases}$

QUEREMOS USAR A TEORIA DE SIST.
 DIN. PLANARES E BIFURCAÇÃO:

1ª TENTATIVA: MÉDIAS DAS ANOMALIAS:
 $\frac{T_1 + T_2}{2}$ E $\frac{S_1 + S_2}{2}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (T_1 + T_2) \right) = \frac{1}{2} (\dot{T}_1 + \dot{T}_2) = -c \left(\frac{1}{2} (T_1 + T_2) \right)$$

$$E \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (S_1 + S_2) \right) = \frac{1}{2} (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) = -d \left(\frac{1}{2} (S_1 + S_2) \right)$$

\Downarrow

$$\frac{1}{2} (T_1 + T_2) = CTE e^{-ct} \rightarrow 0 \quad E$$

$$\frac{1}{2} (S_1 + S_2) = CTE e^{-dt} \rightarrow 0$$

$Q \gg 0 \quad T \rightarrow \infty.$

2ª TENTATIVA: ΔT E ΔS CONT.

∴ CTHS FICA

$$\begin{cases} \frac{d\Delta T}{dt} = \dot{T}_2 - \dot{T}_1 \\ = c(2T^* - \Delta T) - 2|q|\Delta T, \\ \frac{d\Delta S}{dt} = \dot{S}_2 - \dot{S}_1 \\ = d(2S^* - \Delta S) - 2|q|\Delta S. \end{cases}$$

VAMOS ADIMENSIONALIZAR * VIA

$$x := \frac{\Delta S}{2S^*} \quad y := \frac{\Delta T}{2T^*};$$

VAMOS RESCALONAR t VIA

$$t' := ct.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt'} \\ = \frac{1}{2cS^*} \left(\frac{d\Delta S}{dt} \right) \\ = \frac{d}{c} (1-x) - \left| \frac{2q}{c} \right| x \\ = \delta (1-x) - |f|x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt'} \\ = \frac{1}{2cT^*} \left(\frac{d\Delta T}{dt} \right) \\ = 1-y - \left| \frac{2q}{c} \right| y \\ = 1-y - |f|y. \end{cases}$$

$$\left(\delta = \frac{d}{c}, f = -\frac{2q}{c} \right)$$

OBS:

$$\lambda = \frac{c}{4\alpha k T^*} \quad \text{E} \quad R = \frac{\beta S^*}{\alpha T^*}$$

$$\Downarrow \\ R x - y = \lambda f (= \lambda f(x, y))$$

$$DJ \\ R x - y = \frac{\beta S^*}{\alpha T^*} \cdot \frac{\Delta S}{2S^*} - \frac{\Delta T}{2T^*}$$

$$= \frac{\beta \Delta S - \alpha \Delta T}{2\alpha T^*}$$

E

$$\lambda f = \frac{e}{2\alpha k T^*} \left(-\frac{2q}{c} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha k T^*} (\alpha \Delta T - \beta \Delta S).$$

OBS: O CAMPO DE VETORES DE

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(1-x) - |f|x \\ \dot{y} = 1-y - |f|y \end{cases}$$

É LIPSCHITZ. TAL EDO TEM 3 PARÂMETROS: $\delta, \lambda \in \mathbb{R}$.

AQUI ASSUMIMOS $\delta \in (0, 1]$. (ESCALA DE TEMPO DE TROCA TERMAL (C) É BEM MAIOR QUE A DE TROCA SALINA (d) ∇)

ASSUMIMOS TAMBÉM QUE $S^* \cdot T^* > 0$.

∴ $R > 0$. (VIMOS ANT. QUE QDO ISSO

OCORRE, DIFERENÇAS DE SALIN. (RESP. TEMP.)

DOMINAM P/ $R > 1$ (RESP. $R < 1$)).

OBS: P^{tes} FIXOS DE (t):

$$\begin{cases} x^* = \frac{\delta}{\delta + |f^*|} \\ y^* = \frac{1}{1 + |f^*|} \end{cases}$$

$$c/ \lambda f^* = R x^* - y^*.$$

NOTE QUE:

$$\begin{aligned} \lambda f^* &= \frac{\delta R}{\delta + |f^*|} - \frac{1}{1 + |f^*|} \\ &= \phi(f^*; R, \delta). \end{aligned}$$

CONT.



25

RECAPITULANDO: CTHS e/
 ADMENSIONALIZADAS E $\dot{x} = \frac{1}{c} \dot{x}'$ RESCALONADO.

(+) $\begin{cases} \dot{x} = \delta(1-x) - f|x, \\ \dot{y} = 1-y - f|y. \end{cases}$

$\delta = \frac{d}{c},$
 $f = f(x,y) = \frac{1}{\lambda}(Rx-y),$
 $\lambda = \frac{c}{4 \times kT^*} \quad E \quad R = \frac{3S^*}{2T^*}$

TRES PARÂMETROS

PTS FIXOS DE (+)

$\begin{cases} x^* = \frac{\delta}{\delta + |f^*|} \\ y^* = \frac{1}{1 + |f^*|} \end{cases}$

NOTE QUE: $\lambda f^* = \frac{\delta R}{\delta + |f^*|} - \frac{1}{1 + |f^*|}$
 $= \phi(f^*; R, \delta).$

(CF. FIG. G.1, PÁG. 79)

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE (x^*, y^*)

$P/f^* \geq 0:$

$A = Df(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} -(\delta + |f^*|) + \frac{R x^*}{\lambda} & + \frac{x^*}{\lambda} \\ + \frac{R x^*}{\lambda} & -(1 + |f^*|) + \frac{y^*}{\lambda} \end{bmatrix}$

DE FATO, POR EX.,

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(1-x) + \frac{1}{\lambda}(Rx-y)x \right) =$

$-\delta + \frac{1}{\lambda}(2Rx - y) =$

$-\delta + \frac{1}{\lambda}[(Rx-y) + Rx] =$

$-\delta - \left[\frac{+Rx-y}{\lambda} \right] + \frac{Rx}{\lambda} =$

$-(\delta + |f|) + \frac{Rx}{\lambda}.$

(VERIFIQUE AS OUTRAS ENTRADAS DE A!)

OBS: $P/f^* \geq 0:$ **26**

T = TRAÇO DE A

$= -\delta - 1 - 2|f^*| -$
 $\left(+ \frac{Rx^* - y^*}{\lambda} \right)$
 $= -\delta - 1 - 2|f^*| - |f^*|$
 $= -(1 + \delta + 3|f^*|);$

D = DET. DE A

$= (\delta + |f^*|)(1 + |f^*|)$
 $+ (1 + |f^*|) \frac{Rx^*}{\lambda}$
 $+ (\delta + |f^*|) \frac{y^*}{\lambda}$
 $- \frac{Rx^* y^*}{\lambda^2} + \frac{Rx^* y^*}{\lambda^2}$
 $= \delta + \delta|f^*| + |f^*| + 2|f^*|^2$
 $+ \left(\frac{Rx^*}{\lambda} - \frac{\delta y^*}{\lambda} \right) + \left(\frac{-y^* + y^*}{\lambda} \right)$
 $= \delta + \delta|f^*| + |f^*| + 2|f^*|^2$
 $+ \left(\frac{Rx^* - y^*}{\lambda} \right) + (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$
 $= \delta + \delta|f^*| + 2|f^*|^2 + 2|f^*|^2$
 $+ (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$
 $= (\delta + 2|f^*|)(1 + |f^*|) + (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda};$

$T^2 - 4D = (1 + \delta)^2 + 6(1 + \delta)|f^*| +$
 $9|f^*|^2 - 4(1 + \delta)|f^*|$
 $- 8|f^*|^2 - 8|f^*|^2$
 $+ (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda}$

VERIFIQUE $= \dots$
 $= (1 - \delta + |f^*|)^2 - \frac{4(1 - \delta)}{2(1 + |f^*|)} \leq 0$
 CONT. \rightarrow