Recorrências ou Equações a Diferenças Finitas (EDF)

Uma Introdução - Parte Dois

José Renato Ramos Barbosa

www.ufpr.br/∼jrrb

30/01/2012-17/02/2012

Lema

- Hipóteses:

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;
  - P é a matriz cujas colunas são os autovetores (colunas) LI $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente;

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;
  - P é a matriz cujas colunas são os autovetores (colunas) LI $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente;
  - $R_1, \ldots, R_k$ são as linhas de P^{-1}.

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;
  - P é a matriz cujas colunas são os autovetores (colunas) LI $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente;
  - $R_1, \ldots, R_k$ são as linhas de P^{-1}.
- Teses:

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;
  - P é a matriz cujas colunas são os autovetores (colunas) LI $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente;
  - $R_1, \ldots, R_k$ são as linhas de P^{-1}.
- Teses:
  - R_i é autovetor linha de C associado a λ_i, $i = 1, \ldots, k$;

Lema

- Hipóteses:
  - C é diagonalizável;
  - P é a matriz cujas colunas são os autovetores (colunas) LI $C_1, \ldots, C_k$ de C associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, respectivamente;
  - $R_1, \ldots, R_k$ são as linhas de P^{-1}.
- Teses:
  - R_i é autovetor linha de C associado a λ_i, $i = 1, \ldots, k$;
  - Qualquer solução de $S_{n+1} = CS_n$ pode ser escrita como

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i}.$$

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C - \lambda I)X = 0$ e $Y(C - \lambda I) = 0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C - \lambda I)X = 0$ e $Y(C - \lambda I) = 0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.
- De fato:

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C - \lambda I)X = 0$ e $Y(C - \lambda I) = 0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.
- De fato:
  - $\det(C - \lambda I) = \det(C^T - \lambda I)$.

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C-\lambda I)X=0$ e $Y(C-\lambda I)=0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.
- De fato:
  - $\det(C-\lambda I)=\det(C^T-\lambda I)$.
  - $\therefore \exists \ \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}\subset \mathbb{C}^k-\left\{(0,\ldots,0)^T\right\}$ com $C\mathbf{v}_1=\lambda I\mathbf{v}_1$ e $C^T\mathbf{v}_2=\lambda I\mathbf{v}_2$, i.e., $\mathbf{v}_2^T C=\mathbf{v}_2^T\lambda I$.

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C - \lambda I)X = 0$ e $Y(C - \lambda I) = 0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.
- De fato:
  - $\det(C - \lambda I) = \det(C^T - \lambda I)$.
  - $\therefore \exists \ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{C}^k - \left\{(0, \ldots, 0)^T\right\}$ com $C\mathbf{v}_1 = \lambda I \mathbf{v}_1$ e $C^T\mathbf{v}_2 = \lambda I \mathbf{v}_2$, i.e., $\mathbf{v}_2^T C = \mathbf{v}_2^T \lambda I$.
- $CP = PD$, i.e., $\boxed{P^{-1}C = DP^{-1}}$, com $D =$diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Demonstração do Lema

- Sendo λ um autovalor de C, $(C - \lambda I)X = 0$ e $Y(C - \lambda I) = 0$ têm soluções não-nulas, i.e., autovetores coluna e linha, respectivamente.
- De fato:
  - $\det(C - \lambda I) = \det(C^T - \lambda I)$.
  - $\therefore \exists \; \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{C}^k - \{(0, \ldots, 0)^T\}$ com $C\mathbf{v}_1 = \lambda I \mathbf{v}_1$ e $C^T\mathbf{v}_2 = \lambda I \mathbf{v}_2$, i.e., $\mathbf{v}_2^T C = \mathbf{v}_2^T \lambda I$.
- $CP = PD$, i.e., $\boxed{P^{-1}C = DP^{-1}}$, com $D =$diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.
- Daí R_i é o autovetor linha associado a λ_i.

Continuação da Demonstração do Lema

- De fato:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{col. } 1 \text{ de } C & \dots & \text{col. } j \text{ de } C & \dots & \text{col. } k \text{ de } C \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 R_{11} & \dots & \lambda_1 R_{1j} & \dots & \lambda_1 R_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_i R_{i1} & \dots & \lambda_i R_{ij} & \dots & \lambda_i R_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k R_{k1} & \dots & \lambda_k R_{kj} & \dots & \lambda_k R_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$R_i C = \lambda_i [R_{i1} \dots R_{ik}] = \lambda_i R_i.$$

Continuação da Demonstração do Lema

- Como $P^{-1}P = I$, $R_i C_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$

Continuação da Demonstração do Lema

- Como $P^{-1}P = I$, $R_i C_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$
- Daí, para S_0 escrito (de modo único) como uma combinação linear de C_1, ..., C_k:

$$S_0 = a_1 C_1 + \cdots + a_k C_k \Rightarrow$$

$$R_i S_0 = R_i(a_1 C_1 + \cdots + a_k C_k) = a_i R_i C_i = a_i \Rightarrow$$

$$\boxed{S_n = C^n S_0 = \textstyle\sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) C^n C_i}.$$

Observação e Definição

- Para C com menos que k autovetores LI, a última fórmula da demonstração continua válida, sendo as colunas de P autovetores generalizados de C.

Observação e Definição

- Para C com menos que k autovetores LI, a última fórmula da demonstração continua válida, sendo as colunas de P autovetores generalizados de C.
- Se C tem $t \leq k$ autovalores tais que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_t|,$$

λ_1 é o autovalor dominante de C. Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, λ_1 é o autovalor estritamente dominante de C.

Teorema do Comportamento Assintótico (TCA)

- Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')}C',$$

sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.

Teorema do Comportamento Assintótico (TCA)

- Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')}C',$$

sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.

- Daí:

Teorema do Comportamento Assintótico (TCA)

- Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')} C',$$

sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.

- Daí:
  - $R'S_0 \neq 0 \Rightarrow S_n$ converge para um múltiplo de C';

Teorema do Comportamento Assintótico (TCA)

- Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')}C',$$

sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.

- Daí:
  - $R'S_0 \neq 0 \Rightarrow S_n$ converge para um múltiplo de C';
  - $R'S_0 = 0 \Rightarrow S_n$ converge mais lentamente do que $|\lambda|^n$;

Teorema do Comportamento Assintótico (TCA)

- Se λ é um autovalor estritamente dominante simples de C diagonalizável então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')} C',$$

  sendo C' e R' quaisquer autovetores coluna e linha, respectivamente, de C correspondente a λ.
- Daí:
  - $R'S_0 \neq 0 \Rightarrow S_n$ converge para um múltiplo de C';
  - $R'S_0 = 0 \Rightarrow S_n$ converge mais lentamente do que $|\lambda|^n$;
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda^n} = \text{cte} = \frac{(R'S_0)}{(R'C')} \cdot$ (n-ésima componente de C').

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i = (R_1 S_0) \lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i = (R_1 S_0) \lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0) C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0) \lambda_i^n C_i / \lambda_1^n$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i = (R_1 S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i/\lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz

$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k}(\lambda_i/\lambda_1)^n(R_i S_0)(C_i)_j\right| \le \sum_{i=2}^{k} |\lambda_i/\lambda_1|^n |R_i S_0||C_i|_j.$$

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i = (R_1 S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i/\lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz
$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k}(\lambda_i/\lambda_1)^n(R_i S_0)(C_i)_j\right| \leq \sum_{i=2}^{k}|\lambda_i/\lambda_1|^n |R_i S_0||C_i|_j.$$
- Daí $\lim_{n\to\infty}|Y_n|_j = 0$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i = (R_1 S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i/\lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz
$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k}(\lambda_i/\lambda_1)^n(R_i S_0)(C_i)_j\right| \leq \sum_{i=2}^{k}|\lambda_i/\lambda_1|^n|R_i S_0||C_i|_j.$$
- Daí $\lim_{n\to\infty}|Y_n|_j = 0$.
- Daí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1,$$
para C_1 autovetor coluna de C associado a λ e R_1 autovetor linha de C como especificado no Lema.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k} (R_i S_0)\lambda_i^n C_i = (R_1 S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k} (R_i S_0)\lambda_i^n C_i / \lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz

$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k} (\lambda_i/\lambda_1)^n (R_i S_0)(C_i)_j\right| \leq \sum_{i=2}^{k} |\lambda_i/\lambda_1|^n |R_i S_0||C_i|_j.$$

- Daí $\lim_{n\to\infty} |Y_n|_j = 0$.
- Daí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1,$$

para C_1 autovetor coluna de C associado a λ e R_1 autovetor linha de C como especificado no Lema.
- Sendo λ simples, tome $R' = \alpha R_1$ com $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \stackrel{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k}(R_iS_0)\lambda_i^n C_i = (R_1S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k}(R_iS_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k}(R_iS_0)\lambda_i^n C_i/\lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz
$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k}(\lambda_i/\lambda_1)^n(R_iS_0)(C_i)_j\right| \leq \sum_{i=2}^{k}|\lambda_i/\lambda_1|^n|R_iS_0||C_i|_j.$$
- Daí $\lim_{n\to\infty}|Y_n|_j = 0$.
- Daí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1S_0)C_1,$$
para C_1 autovetor coluna de C associado a λ e R_1 autovetor linha de C como especificado no Lema.
- Sendo λ simples, tome $R' = \alpha R_1$ com $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Daí, de $R'C_1 = \alpha R_1C_1 = \alpha$, $R'S_0 = \alpha R_1S_0 = (R'C_1)R_1S_0$.

Demonstração do TCA

- Seja $\lambda = \lambda_1$.
- $S_n \overset{\text{Lema}}{=} \sum_{i=1}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i = (R_1 S_0)\lambda^n C_1 + \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i$.
- $\therefore \frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1 + Y_n$, onde $Y_n = \sum_{i=2}^{k}(R_i S_0)\lambda_i^n C_i/\lambda_1^n$.
- Cada coordenada j de $|Y_n|$ satisfaz
$$|Y_n|_j = \left|\sum_{i=2}^{k}(\lambda_i/\lambda_1)^n(R_i S_0)(C_i)_j\right| \leq \sum_{i=2}^{k}|\lambda_i/\lambda_1|^n|R_i S_0||C_i|_j.$$
- Daí $\lim_{n\to\infty}|Y_n|_j = 0$.
- Daí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\lambda^n} = (R_1 S_0)C_1,$$
para C_1 autovetor coluna de C associado a λ e R_1 autovetor linha de C como especificado no Lema.
- Sendo λ simples, tome $R' = \alpha R_1$ com $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Daí, de $R'C_1 = \alpha R_1 C_1 = \alpha$, $R'S_0 = \alpha R_1 S_0 = (R'C_1)R_1 S_0$.
- Tome $R_1 S_0 = \frac{(R'S_0)}{(R'C_1)}$ e $C_1 = C'$.

Sendo λ Simples Estritamente Dominante, é Melhor Usar $\boxed{s_n = \text{cte}\lambda^n + \sum_{i=2}^{t} a_i(n)\lambda_i^n}$ (Veja Teorema Fundamental) do que o TCA para Estudar o Comportamento Assintótico?

- Para determinar a constante $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda^n} = \text{cte}$, precisamos usar as k condições iniciais e os t autovalores na fórmula delimitada acima.

Sendo λ Simples Estritamente Dominante, é Melhor Usar $\boxed{s_n = \text{cte}\lambda^n + \sum_{i=2}^{t} a_i(n)\lambda_i^n}$ (Veja Teorema Fundamental) do que o TCA para Estudar o Comportamento Assintótico?

- Para determinar a constante $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda^n} = \text{cte}$, precisamos usar as k condições iniciais e os t autovalores na fórmula delimitada acima.
- Em geral, o custo computacional para calcular todos os autovalores é alto.

Sendo λ Simples Estritamente Dominante, é Melhor Usar $\boxed{s_n = \text{cte}\lambda^n + \sum_{i=2}^{t} a_i(n)\lambda_i^n}$ (Veja Teorema Fundamental) do que o TCA para Estudar o Comportamento Assintótico?

- Para determinar a constante $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda^n} = \text{cte}$, precisamos usar as k condições iniciais e os t autovalores na fórmula delimitada acima.
- Em geral, o custo computacional para calcular todos os autovalores é alto.
- Para usar o TCA, basta obter o autovalor dominante simples (λ), um autovetor coluna dominante (C' associado a λ) e um autovetor linha dominante (R' associado a λ).

Sendo λ Simples Estritamente Dominante, é Melhor Usar $\boxed{s_n = \text{cte}\lambda^n + \sum_{i=2}^{t} a_i(n)\lambda_i^n}$ (Veja Teorema Fundamental) do que o TCA para Estudar o Comportamento Assintótico?

- Para determinar a constante $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\lambda^n} = \text{cte}$, precisamos usar as k condições iniciais e os t autovalores na fórmula delimitada acima.
- Em geral, o custo computacional para calcular todos os autovalores é alto.
- Para usar o TCA, basta obter o autovalor dominante simples (λ), um autovetor coluna dominante (C' associado a λ) e um autovetor linha dominante (R' associado a λ).
- Existem métodos de baixo custo computacional que calculam um autovetor dominante e o autovalor dominante.

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
    - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
  - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
  - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;
  - $X_4 = C^4 X_0 = CX_3 = [53\ 27]^T = 27\,[53/27\ 1]^T$;

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
  - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;
  - $X_4 = C^4 X_0 = CX_3 = [53\ 27]^T = 27\,[53/27\ 1]^T$;
  - $\cdots$

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
    - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
    - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
    - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
    - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;
    - $X_4 = C^4 X_0 = CX_3 = [53\ 27]^T = 27\,[53/27\ 1]^T$;
    - $\cdots$
    - $X_n \to$ múltiplo de C'.

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
  - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;
  - $X_4 = C^4 X_0 = CX_3 = [53\ 27]^T = 27\,[53/27\ 1]^T$;
  - $\cdots$
  - $X_n \to$ múltiplo de C'.
- Na i-ésima iterada, para limitar o crescimento das componentes do X_i, calcula-se

$$\boxed{U_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{||X_{i-1}||} \text{ e } X_i = CU_{i-1}}.$$

Método de Iteração de Potências

- Motivação: A multiplicação por C tende a mover quase todo vetor para a direção de C'.
- Sendo, por exemplo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $X_0 = [3\ 2]^T$:
  - $\lambda = 2$ e, por exemplo, $C' = [2\ 1]^T$;
  - $X_1 = C^1 X_0 = CX_0 = [7\ 3]^T = 3\,[7/3\ 1]^T$;
  - $X_2 = C^2 X_0 = CX_1 = [13\ 7]^T = 7\,[13/7\ 1]^T$;
  - $X_3 = C^3 X_0 = CX_2 = [27\ 13]^T = 13\,[27/13\ 1]^T$;
  - $X_4 = C^4 X_0 = CX_3 = [53\ 27]^T = 27\,[53/27\ 1]^T$;
  - $\cdots$
  - $X_n \to$ múltiplo de C'.
- Na i-ésima iterada, para limitar o crescimento das componentes do X_i, calcula-se

$$\boxed{U_{i-1} = \frac{X_{i-1}}{||X_{i-1}||} \text{ e } X_i = CU_{i-1}}.$$

- Tendo obtido uma boa aproximação de C', como calcular uma boa aproximação de λ?

Método de Iteração de Potências

- Obtendo o Quociente de Rayleigh via Mínimos Quadrados:

$$X\lambda = CX \Rightarrow X^T X\lambda = X^T CX \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{X^T CX}{X^T X}}.$$

Método de Iteração de Potências

- Obtendo o Quociente de Rayleigh via Mínimos Quadrados:

$$X\lambda = CX \Rightarrow X^T X\lambda = X^T CX \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{X^T CX}{X^T X}}.$$

- Programa em Matlab do Método:

```
% Método de Iteração de Potências
% Calcula autovetor dominante X de uma matriz C
% Input:  matriz C, vetor inicial (não nulo) X,
% número de iteradas n
% Output:  autovalor dominante lam, X
function [lam,X]=powerit(C,X,n)
for i=1:n
U=X/norm(X); % normaliza vetor
X=C*U; % passo da potenciação
lam=U'*X; % aproximação via Quociente de Rayleigh
end
```

Método de Iteração de Potências

- O Método de Iteração de Potências é o uso repetido da Forma Matricial de (H). Daí, sendo $S_0 = X_0$, $S_n = X_n$ é a solução do PVI

$$\boxed{\text{(H)},\ s_0 = x_0,\ \ldots, s_{k-1} = x_{k-1}}.$$

Método de Iteração de Potências

- O Método de Iteração de Potências é o uso repetido da Forma Matricial de (H). Daí, sendo $S_0 = X_0$, $S_n = X_n$ é a solução do PVI
$$\boxed{(H),\ s_0 = x_0,\ \ldots, s_{k-1} = x_{k-1}}.$$
- Por exemplo, já vimos que a Recorrência de Fibonacci para
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
resulta em
$$\lambda = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } C' = (-2/(1-\sqrt{5}), 1)^T.$$

Método de Iteração de Potências

- O Método de Iteração de Potências é o uso repetido da Forma Matricial de (H). Daí, sendo $S_0 = X_0$, $S_n = X_n$ é a solução do PVI
$$\boxed{(H),\ s_0 = x_0,\ \ldots, s_{k-1} = x_{k-1}}.$$
- Por exemplo, já vimos que a Recorrência de Fibonacci para
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
resulta em
$$\lambda = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } C' = (-2/(1-\sqrt{5}), 1)^T.$$
- De fato, usando o programa anterior:

Método de Iteração de Potências

```
octave:1> C=[1 1;1 0];
octave:2> X=[1 0];
octave:3> X0=X';
octave:4> [lam,X]=powerit(C,X0,20)
lam = 1.6180
X =
  1.37638
  0.85065
octave:5> lam=(1+sqrt(5))/2
lam = 1.6180
octave:6> X=[-2/(1-sqrt(5)) 1]
X =
  1.6180  1.0000
octave:7> X=X/norm(X)
X =
  0.85065  0.52573
octave:8> X=(0.85065/0.52573)*X'
X =
  1.37638
  0.85065
```

Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências Para C Diagonalizável e λ_1, ..., λ_k Reais

- Se $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$ então para quase todo vetor inicial X_0, o Método de Iteração de Potências converge linearmente para um autovetor associado a λ_1 numa taxa de convergência constante dada por $S = |\lambda_2/\lambda_1|$.

Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências Para C Diagonalizável e λ_1, ..., λ_k Reais

- Se $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$ então para quase todo vetor inicial X_0, o Método de Iteração de Potências converge linearmente para um autovetor associado a λ_1 numa taxa de convergência constante dada por $S = |\lambda_2/\lambda_1|$.
- A frase "para quase todo vetor X_0" significa que a iteração converge, na taxa especificada, se X_0 não pertence a união dos hiperplanos de dimensão $k-1$ gerados por $\{C_1, C_3, \ldots, C_k\}$ e $\{C_2, C_3, \ldots, C_k\}$.

Demonstração do Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências

- Seja $X_0 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_k C_k$.

Demonstração do Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências

- Seja $X_0 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_k C_k$.
- A frase "para quase todo vetor X_0" significa que podemos assumir que c_1 e c_2 são não nulos.

Demonstração do Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências

- Seja $X_0 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_k C_k$.
- A frase "para quase todo vetor X_0" significa que podemos assumir que c_1 e c_2 são não nulos.
- $CX_0 = c_1\lambda_1 C_1 + c_2\lambda_2 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k C_k \Rightarrow$
  $C^2 X_0 = c_1\lambda_1^2 C_1 + c_2\lambda_2^2 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k^2 C_k \Rightarrow$
  $C^3 X_0 = c_1\lambda_1^3 C_1 + c_2\lambda_2^3 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k^3 C_k \Rightarrow$
  $\ldots$

Demonstração do Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências

- Seja $X_0 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_k C_k$.
- A frase "para quase todo vetor X_0" significa que podemos assumir que c_1 e c_2 são não nulos.
- $CX_0 = c_1\lambda_1 C_1 + c_2\lambda_2 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k C_k \Rightarrow$
  $C^2 X_0 = c_1\lambda_1^2 C_1 + c_2\lambda_2^2 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k^2 C_k \Rightarrow$
  $C^3 X_0 = c_1\lambda_1^3 C_1 + c_2\lambda_2^3 C_2 + \cdots + c_k\lambda_k^3 C_k \Rightarrow$
  $\ldots$
- Por abuso de notação, supondo que aplicamos a normalização em cada iterada, estamos repetido os c_j's em cada iterada.

Demonstração do Teorema da Convergência Linear do Método de Iteração de Potências

- Seja $X_0 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + \cdots + c_k C_k$.
- A frase "para quase todo vetor X_0" significa que podemos assumir que c_1 e c_2 são não nulos.
- $CX_0 = c_1 \lambda_1 C_1 + c_2 \lambda_2 C_2 + \cdots + c_k \lambda_k C_k \Rightarrow$
  $C^2 X_0 = c_1 \lambda_1^2 C_1 + c_2 \lambda_2^2 C_2 + \cdots + c_k \lambda_k^2 C_k \Rightarrow$
  $C^3 X_0 = c_1 \lambda_1^3 C_1 + c_2 \lambda_2^3 C_2 + \cdots + c_k \lambda_k^3 C_k \Rightarrow$
  $\ldots$
- Por abuso de notação, supondo que aplicamos a normalização em cada iterada, estamos repetido os c_j's em cada iterada.
- Daí basta aplicar o limite $i \to \infty$ em

$$\frac{C^i X_0}{\lambda_1^i} = c_1 C_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i C_2 + \cdots + c_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^i C_k.$$