UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I - PPGM
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Os exercícios 2,5,7,8,9 e 10 devem ser entregues até o dia 03/setembro/2015.

Os exercícios 1 ao 6 são baseados no livro: A First Course in Numerical Methods (xerox dos capítulos 1 e 2)

1. Realize cálculos similares aos do exemplo 1.3 para a aproximação da derivada da função $f(x) = e^{-2x}$ avaliada em $x_0 = 0.5$. Observe similaridades e diferenças comparando seu gráfico contra aquele da Figura 1.3.

2. Realize a derivação e os cálculos análogos aos do exemplo 1.2. Usando a expressão
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$
para aproximar a primeira derivada de $f'(x_0)$. Mostre que o erro é $\mathcal{O}(h^2)$. Mais precisamente, o termo dominante do erro é $-\frac{h^2}{12}f'''(x_0)$ quando $f'''(x_0) \neq 0$.

3. A função $f_1(x_0, h) = sen(x_0 + h) - sen(x_0)$ pode ser transformada em uma outra forma, $f_2(x_0, h)$, usando a fórmula trigonométrica
$$sen(\phi) - sen(\psi) = 2cos\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) sen\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right).$$
Então f_1 e f_2 tem os mesmos valores, em aritimética exata, para quaisquer valores dos argumentos x_0 e h.

(a) Derive $f_2(x_0, h)$.

(b) Sugira uma fórmula que evite erros de cancelamento para calcular a aproximação $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2}$ para derivada de $f(x) = sen(x)$ em $x = x_0$. Escreva um programa em MATLAB que implementa sua fórmula e calcule uma aproximação para $f'(1.2)$, para $h = 1e-20, 1e-19, \ldots, 1$.

(c) Explique a diferença na precisão entre seus resultados e os resultados reportados no exemplo 1.3.

4. (a) Mostre que

$$ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

   (b) Qual das duas fórmula é mais adequada para computação numérica? Explique porque e forneça um exemplo numérico na qual a diferença na precisão é evidente.

5. Para as seguintes expressões, indique as dificuldades numéricas que podem ocorrer, e reescreva as fórmulas em uma maneira que é mais adequada para a computação numérica.

   (a) $\sqrt{x + \frac{1}{x}}$ - $\sqrt{x - \frac{1}{x}}$, onde $x \gg 1$.

   (b) $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ onde $a \approx 0$ e $b \approx 1$.

6. (a) Explique em detalhes como evitar overflow no cálculo da norma euclidiana (também conhecida como norma ℓ_2) de um vetor (possivelmente grande em tamanho).

   (b) Escreva um programa em MATLAB para calcular a norma de um vetor de uma maneira numericamente estável. Demonstre a performance de seu código com alguns poucos exemplos.

7. Este exercício e o próximo são baseados no livro: Afternotes on Numerical Analysis - Stewart. Ele esta dividido em partes e consiste na demonstração da convergência local quadrática do método de Newton, dada no seguinte teorema:

   Teorema: Se $f \in C^2[a, b]$ e existe uma raiz $\bar{x}$ em $[a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ e $f^{'}(\bar{x}) \neq 0$, então existe um número δ tal que, partindo com x_0 em $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, o método de Newton converge quadraticamente.

   Passo 1: Considere ψ definida em $[a, b]$ por $\psi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ e o erro na iteração k dado por $e_k = x_k - \bar{x}$. Mostre que $e_{k+1} = \psi^{'}(\xi_k)e_k$ onde ξ_k está entre x_k e $\bar{x}$.

   Passo 2: Supondo que $|\psi^{'}(\xi_k)| \leq C < 1$, para todo $k = 0, 1, \ldots$ e usando as hipóteses do teorema, mostre que $|e_k| \leq C^k|e_0|$, concluindo, desta forma a convergência.

   Passo 3: Use expansão de Taylor até ordem 2 para ψ para concluir que a convergência é quadrática (ver pg. 13 do Stewart).

8. (a) Utilizando o método de Newton, mostre que a $\sqrt[p]{a}$ com $a > 0$, pode ser calculada, para todo $x_0 > 0$, pela fórmula de recorrência:

$$x_{k+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right)$$

(b) Faça $x_0 = 1$ e aproxime a raiz $\sqrt{2}$ fazendo 3 iterações do método de Newton, usando 5 dígitos decimais com arredondamento.

(c) Calcule o erro relativo e absoluto cometido no item (b) acima (utilize $\sqrt{2} = 1.41421356$)

9. (Novo método baseado no método da Bisseção)

(a) Desenvolva o método da trisseção fazendo a divisão do intervalo $[a, b]$ em três subintervalos de tamanhos iguais, apresentando um algoritmo para o seu método.

(b) Mostre que o método converge.

(c) Estime um limite para o número de iterações.

(d) Pela sua experiência você acha que é possível apresentar um método fazendo um número maior de subdivisões do intervalo $[a, b]$, por exemplo 4,5, ...? Quais seriam as possíveis dificuldades para este método?

10. (Determinante de Vandermonde). Considere $x_0, x_1, \ldots, x_n$ fixados. A matrix de Vandermonde é dada por:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$det(V) = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j).$$

Sugestão: zere todos os elementos da primeira coluna a partir da segunda linha. Depois multiplique cada coluna k por x_0 e some com a coluna $k+1$, para $k = 0, \ldots, n-1$. Com isso é possível colocar em evidência $(x_i - x_0), i = 1, \ldots, n$ e então é só desenvolver o determinante e usar indução finita.