UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios 2 (sistemas lineares) - Análise Numérica I
Professor Luiz Carlos Matioli

1. Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & -1 \end{cases}$$

   (a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é definida positiva.

   (b) Encontre R tal que $A = R^T R$, em que A é a matriz dos coeficientes do sistema.

   (c) Utilizando o item anteriorer encontre a solução do sistema.

   (d) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, utlizando a decomposição de Cholesky

2. Aplique o método de Eliminação de Gauss para encontrar a solução do Sistema dado no exercício 1.

3. Faça a decomposição LU da matriz dos coeficientes do sistema dado no exercício 1.

4. Considere a seguinte decomposição LU de uma matriz $A_{3\times 3}$ qualquer.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{22} \\ 0 & u_{22} & u_{32} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

   (a) Suponha a matriz A dada. Determine os fatores L e U desta decomposição. Mostre que os fatores L e U são os mesmos do método da eliminação de Gauss.

   (b) A decomposição LU acima nem sempre existe. Tente justificar isso, ou se convencer deste fato. Tente encontrar uma matriz $A_{2\times 2}$ que não possua decompoisção LU.

   (c) [Seja persistente nesse exercício] Generalize o item (a) deste exercício para uma matriz A quadrada $n \times n$. Escreva um algoritmo, como foi feito com a eliminação de Gauss e Cholesky e determine a complexidade do mesmo.

5. Use o exercício anterior para encontrar a decompoisição LU da matriz dos coefientes do sistema do exercicio 1. Utilize esta decomposição para resolver o sistema.

6. Uma maneira de determinar a inversa de uma matriz não singular é através da resolução de sistema linear. Por exemplo, pode ser utilizado qualquer um dos métodos já estudados (quando estes se aplicam - seja cuidadosa com as hipóteses, por exemplo, Cholesky exige matriz positiva definida). Vamos utilizar desta técnica para encontrar a inversa da matriz dos coeficientes do exercício 1 (mas poderia ser qualquer outra que tenha inversa). Neste item utilizaremos a Eliminação de Gauss. Para isso escreva a seguinte matriz aumentada $[A\ e_1\ e_2\ e_3]$ sendo A a matriz dos coeficientes do sistema (do exercício 1), e_i, $i = 1, 2, 3$ os vetores canônicos (um na posição i e zero nas demais).

   Feito isso utilize o algoritmo da eliminação de Gauss para triangularizar a matriz A obtendo $[\ \bar{A}\ b_1\ b_2\ b_3]$, em que $\bar{A}$ é a matriz triangular superior obtida pela eliminação de gauss e b_1, b_2 e b_3 são vetores correspondentes.

   Finalmente resolva $\bar{A}x = b_i$, o resultado é a coluna i da matriz inversa de A. Determine a inversa da matriz dos coeficientes do sistema do exercício 1.

7. Repita o exercício anterior para a decomposição de Cholesky (já que mostrou que a matriz é definida positiva)

8. (Matriz de Hessenberg - ver livro do Stewart pg. 110) Uma matriz H é Hessenber superior se os elementos $h_{ij} = 0$ para $i > j+1$. Como exemplo, considere o caso com 5 linhas e 5 colunas: (na notação seguinte, onde aparece X pode ser um elemento não nulo e onde aparece 0 é o zero mesmo)

$$H = \begin{pmatrix} X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \end{pmatrix}$$

   (a) Escreva um algoritmo para tornar a matriz de Hessenberg $H_{n\times n}$ triangular superior.

   (b) Mostre que a complexidade do algoritmo é $O(\frac{n^2}{2})$.