Universidade Federal do Paraná - Depto. de matemática
PPGM - Programa de Pós Graduação em Matemática
Lista de exercícios de Otimização II - Professor : Luiz Carlos Matioli

1. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$.

   (a) Mostre que $A^T A$ é semidefinida positiva.

   (b) Mostre que $A^T A$ é definida positiva se e somente se A tem rank cheio. (ver livro Datta pg. 318).

2. (Equação Normal usando cálculo - livro do Watkins pg. 246) Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e a função diferenciável f dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) = \|b - Ax\|_2^2.$$

   (a) Calcule o gradiente de f.

   (b) Mostre que f é uma função convexa (ver exercício 1).

   (c) Use os itens (a) e (b), deste exercício, para obter a Equação Normal e a solução desse problema.

3. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $z^T B z > 0$ para todo z no núcleo de A e $z \neq 0$. Mostre que existe $\bar{\lambda} \geq 0$ tal que $B + \lambda A^T A > 0$ para todo $\lambda \geq \bar{\lambda}$.

4. Considere o algoritmo de barreiras e $Q(x, t) = f(x) + tB(x)$. Prove que:

   (a) $Q(x_{k+1}, t_{k+1}) \leq Q(x_k, t_k)$.

   (b) $B(x_k) \leq B(x_{k+1})$.

   (c) $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$.

5. Considere o problema

$$(P) \qquad \begin{array}{rl} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{sujeito à} & -x_1 - x_2 \leq -1 \end{array}$$

   (a) Resolva o problema (P) utilizando KKT.

   (b) Escreva as funções barreiras, logaritmica e inversa, aplicadas ao problema (P).

   (c) Escreva o algoritmo de penalidade barreira logaritmica aplicado ao problema (P).

   (d) Utilizando o algoritmo anterior, determine x^k em função de ρ^k e mostre que x^k se aproxima da solução encontrada no item (a) somente se $\rho^k \to 0$.

   (f) Mostre que a Hessiana da função barreira no ponto ótimo, inversa ou logaritmica, é mal condicionada.

6. (Do livro: Nash-Sofer) Considere o problema na variável $x \in \mathbb{R}$.

$$(P1) \qquad \begin{array}{rl} \text{minimizar} & -\frac{1}{2}x^2 \\ \text{sujeito à} & x - 1 = 0 \end{array}$$

   (a) Utilize KKT para determinar o par ótimo $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

(b) Escreva a função Lagrangeano aumentado de Powell e Hestenes (penalidade quadrática) associada ao problema (P1).

(c) Mostre que se $\rho < 1$ então a função Lagrangeano aumentado, do item (b), é ilimitada por baixo.

(d) Mostre que se $\rho > 1$ então a função Lagrangeano aumentado, do item (b), é estritamente convexa como função da variável x e então possui um único minimizador.

(e) Analise o que acontece se $\rho = 1$.

(f) Considere na iteração k do método de Lagrangeano aumentado λ^k e $\rho^k > 0$ fixados. Determine o valor de x, em função de λ^k e ρ^k, que minimiza a função Lagrangeano aumentado. O que acontece se $\lambda^k \to 1$?

7. Considere o problema

$$(P2) \qquad \begin{array}{cc} \text{minimizar} & -x_1x_2 \\ \text{sujeito à} & x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{array}$$

(a) Escreva a função penalidade quadrática.

(b) Mostre que se o parâmetro de penalidade $\rho > 1/4$, então a solução da função penalizada, em função do parâmetro de penalidade, é dada por $x_1 = \dfrac{8\rho}{4\rho - 1}$ e $x_2 = \dfrac{4\rho}{4\rho - 1}$. O que acontece quando $\rho \to \infty$?

(c) Encontre a Hessiana da função penalizada do item (a). Mostre que quando o parâmetro de penalidade tende a infinito a Hessiana é mal condicionada.

8. (livro do Martinez: 20^o Colóquio Brasileiro de Matemática) Considere o problema de minimização com restrições de igualdade na sua forma padrão:

$$(PLI) \qquad \begin{array}{c} \text{minimizar} \;\; f(x) \\ \text{sujeito à} \;\;\; Ax = b, \; x \geq 0, \end{array}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ e posto(A) $= m$.

(a) Aplique Barreira logaritmica à restrição $x \geq 0$ e reescreva o problema (PLI) sem essa restrição. Determine o sistema não linear gerado pelas condições de otimalidade.

(b) Determine a matriz Jacobiana desse sistema e mostre que ela é mal condicionada quando o parâmetro de penalidade tende a zero, ou quando alguma componente de x tende a zero.

(c) Se ρ é o parâmetro de penalidade, faça uma mudança de variável da forma $z_i = \dfrac{\rho}{x_i}$ para contornar o problema de mal condicionamento inerente ao método de Barreira.

9. (Do livro: Nash-Sofer) Considere o problema quadrático

$$\begin{array}{cc} \text{minimizar} & \frac{1}{2}x^TQx + \theta b^Tx \\ \text{sujeito a} & b^Tx = 0, \end{array}$$

em que Q é uma matriz simétrica não singular e definida positiva no subespaço $b^Tx = 0$. O vetor $b \neq 0$ e o escalar $\theta > 0$ são dados.

(a) Qual é a solução ótima deste problema? Qual é o correspondente multiplicador de Lagrange ótimo?

(b) Suponha que o problema é resolvido pelo método de Lagrangeano Aumentado de Hestenes-Powell, com a atualização do multiplicador da maneira usual, como vista em sala. Considere λ^k o multiplicador de Lagrange estimado na iteração k e $\rho > 0$ o parâmetro de penalidade (constante para todo k). Mostre que, se o Lagrangeano Aumentado tem um mínimo, este minimizador é:

$$x^k = -\frac{(\lambda^k + \theta)Q^{-1}b}{1 + \rho b^T Q^{-1} b}.$$

(c) Se inicializarmos o método com $\lambda^1 = 0$, mostre que

$$x^k = -\frac{\theta Q^{-1}b}{(1 + \rho b^T Q^{-1} b)^k} \text{ e } \lambda^{k+1} = \theta\left[\frac{1}{(1 + \rho b^T Q^{-1} b)^k} - 1\right].$$

NOTA: Pode ser útil a fórmula de Sherman-Morrison, ou seja se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é inversível e u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, então:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$