UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios 4 (Sistemas lineares - Métodos Iterativos) de An. Num. I
Professor: Luiz Carlos Matioli

Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a partição $A = L + D + U$ em que L é formada pela parte inferior de A, U com a parte superior de A e ambas com zeros na diagonal e D é formada pela parte diagonal de A.

1. Em relação ao método de Jacobi, mostre que:
   (a) $x^{k+1} = D^{-1}[(D-A)x^k + b]$.
   (b) $x^{k+1} = x^k + D^{-1}r^k, \quad$ com $r^k = b - Ax^k$.
   (d) $x^{k+1} = x^0 + D^{-1}(r^0 + r^1 + \cdots + r^k), \quad$ com $r^\ell = b - Ax^\ell$ e $\ell = 0, 1, \ldots, k$.

2. Em relação ao método de Gauss-Seidel, mostre que
   (a) $x^{k+1} = D^{-1}[b - Lx^{k+1} - Ux^k]$.
   (b) $x^{k+1} = (D+L)^{-1}(b - Ux^k) \quad$ (forma vista em sala).
   (c) $x^{k+1} = x^k + (L+D)^{-1}r^k, \quad$ com $r^k = b - Ax^k$.
   (d) $x^{k+1} = x^0 + (L+D)^{-1}(r^0 + r^1 + \cdots r^k), \quad$ com $r^\ell = b - Ax^\ell$ e $\ell = 0, 1, \ldots, k$.

3. (livro Watkins, pg 542 da 2^a. Edição) (a) Na iteração do Método SOR, mostre que as sucessivas iteradas x^k e x^{k+1} são relacionadas por

$$a_{ii}x_i^{k+1} = a_{ii}x_i^k + w\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^k\right], \quad i = 1\ldots, n.$$

   (b) Derive as seguintes expressões para o relacionamento entre as sucessivas iteradas x^k e x^{k+1} do Método SOR

$$Dx^{k+1} = Dx^k + w\left[b - Lx^{k+1} - (D+U)x^k\right].$$

   ou

$$\left(\frac{1}{w}D + L\right)x^{k+1} = \left[\left(\frac{1-w}{w}\right)D - U\right]x^k + b.$$

   Então $Mx^{k+1} = Nx^k + b$, em que $M = \frac{1}{w}D + L$, $N = \left(\frac{1-w}{w}\right)D - U$ e $A = M - N$.

   (c) Mostre que se $r^k = b - Ax^k$, então

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k.$$

4. (**DESAFIO: Método Gauss-Seidel Simétrico**) Uma iteração do método de Gauss-Seidel Simétrico consiste em duas iterações do método Gauss-Seidel padrão, uma na direção adiante (forward) seguida de uma na direção reversa (para trás). Então a primeira metade da iteração é o item (b) do exercicio 2 que foi obtido com $i = 1, \ldots, n$, e a segunda metade é o item (b) do exercício 2 mas obtido com $i = n, \ldots, 1$.
   (a) Obtenha uma fórmula análoga para o método de Gauss-Seidel reverso.

(b) A iteração adiante do método de Gauss-Seidel simétrico consiste em transformar x^k em $x^{k+\frac{1}{2}}$, seguida por um passo de Gauss-Seidel reverso, transformando $x^{k+\frac{1}{2}}$ em x^{k+1}. Mostre que a iteração do método de Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

$$(D+U)x^{k+1} = L(D+L)^{-1}Ux^k + [I - L(D+L)^{-1}]b.$$

(c) Mostre que $I - L(D+L)^{-1} = D(D+L)^{-1}$. Então, use este fato, juntamente com a parte (b) deste exercício, para mostrar que a iteração do método Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b,$$

em que $M = (D+L)D^{-1}(D+U)$ e $N = (D+L)D^{-1}L(D+L)^{-1}U = LD^{-1}U$.

(d) Mostre que se A é simétrica então M é simétrica.

(e) Mostre que M e N determinadas na parte (c), deste exercício, satisfazem $M - N = A$. Então, mostre que com esta escolha de M a iteração do método Gauss-Seidel Simétrico satisfaz

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}r^k,$$

em que $r^k = b - Ax^k$.

5. Mostre que se A é uma matriz 2×2 simétrica positiva definida, então o método de Jacobi converge para qualquer escolha do valor inicial.

6. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e A uma matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que A é positiva definida se e só se $-0.5 < \alpha < 1$.

(b) Mostre que o Método de Jacobi converge se $-0.5 < \alpha < 0.5$ (Sugestão: use o item anterior e o critério das linhas).

7. (Livro Burden pg. 429) Encontre as duas primeiras iterações dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel para os seguintes sistemas lineares, utilizando $x^0 = (0,0,0)^T$.

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 & = & 4. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 10x_1 - x_2 & = & 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 & = & 7 \\ -2x_2 + 10x_3 & = & 6. \end{cases}$

8. (Livro Burden pg. 430) Encontre as duas primeiras iterações do Método SOR com $w = 1.1$ para o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 1. \end{cases}$$