UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Lista de exercícios de Análise Numérica I (PPGM)
Professor : Luiz Carlos Matioli

NOTA: Os exercícios 2, 3, 5 e 6 devem ser entregues - antes da prova.

1. (a) Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva e $x, y \in \mathbb{R}^n$. Defina o produto interno induzido por A como $\langle x, y\rangle_A = x^T A y$. Mostre que $||x||_A = \sqrt{\langle x, x\rangle_A}$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$ (conhecida como norma energia).

   (b) Denote $e^k = x - x^k$, sendo x a solução do sistema linear $Ax = b$. Se $x^k = x^{k-1} + \alpha_{k-1} d^{k-1}$ mostre que $e^k = e^0 - \mathcal{B}_k$ em que $\mathcal{B}_k = span\{d^0, d^1, \ldots, d^{k-1}\}$.

   (c) (Proposição 7.7.5 do livro Watkins, pg 583 da 2^a Edição) Considere $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ obtido por uma linha de busca exata. Então, mostre que

$$r^{k+1} \perp d^k \qquad \text{e} \qquad e^{k+1} \perp_A d^k.$$

   ver sugestão dada em aula (Nota: $e^{k+1} \perp_A d^k = \langle e^{k+1}, d^k\rangle_A = 0$).

2. (Proposição 7.7.22 do livro Watkins, pg 588 da 2^a Edição. Ver também exercício 13 do livro Quarteroni/Sacco/Saleri, pg. 185) Mostre que os parâmetros α_k e β_k do método de gradientes conjugados satisfazem

$$\alpha_k = \frac{||r^k||_2^2}{(d^k)^T A d^k} \qquad \text{e} \qquad \beta_k = \frac{||r^{k+1}||_s^2}{||r^k||_2^2}.$$

3. (Exercício 14 do livro Quarteroni/Sacco/Saleri, pg. 185) Mostre que o resíduo $r^{(k+1)}$ do método de gradientes conjugados pode ser escrito em função dos resíduos $r^{(k)}$ e $r^{(k-1)}$ da seguinte forma:

$$r^{(k+1)} = \left[\left(1 - \alpha_k \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) I - \alpha_k A\right] r^{(k)} + \alpha_k \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} r^{(k-1)}.$$

   (observe que esta relação é semelhante à fórmula de recorrência dos polinômios ortogonais).

4. Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, um vetor $r^0 \in \mathbb{R}^n$, o espaço de Krylov $K_m(A, r^0) = span\{r^0, Ar^0, \ldots, A^{m-1}r^0\}$ e o processo de Arnoldi, para gerar uma base ortonomal para o subespaço $K_m(A, r^0)$, dado como no algoritmo a seguir (uma forma mais simples em relação àquela vista em sala):

   Passo 0: Escolha $q^1 = \dfrac{r^0}{||r^0||}$ com $r^0 = b - Ax^0$ e $m \leq n$.

   Passo1: Para $j = 1, 2, \ldots, m$ faça

$$h_{ij} = (q^i)^T A q^j, \qquad i = 1, 2, \ldots, j$$

$$\hat{q}^{j+1} = Aq^j - \textstyle\sum_{i=1}^{j} h_{i,j} q^i$$

$$h_{j+1,j} = ||\hat{q}^{j+1}||_2$$

$$q^{j+1} = \frac{\hat{q}^{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

(a) Considere $Q_m = [q^1, q^2, \ldots, q^m]$, a qual é uma matriz $n \times m$. Mostre que $Q_m^T Q_m = I_{m\times m} = Q_m Q_m^T$.

(b) Considere

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2m} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3m} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix}.$$

Verifique que o processo de Arnoldi pode ser escrito como $AQ_m = Q_m H_{mm} \Longleftrightarrow Q_m^T A Q_m = H_{mm}$.

(c) Considere $m = 2$, a matriz A e o vetor b dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Escolha $x^0 = 0$ e determine as matrizes Q_2 e H_{22} pelo processo de Arnoldi. Verifique que $Q_2^T A Q_2 = H_{22}$.

(d) Resolva o sistema $Ax = b$ pelo método FOM (full ortogonalization method).

5. Semelhante ao algoritmo de Arnoldi, dado no exercício anterior, escreva um algoritmo para o Processo de Lanczos, ou seja para o caso em que A é simétrica.

6. (a) Considere $m = 2$, a matriz A e o vetor b dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Escolha $x^0 = 0$ e determine as matrizes Q_2 e T_{22} pelo processo de Lanczos. Verifique que $Q_2^T A Q_2 = T_{22}$.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$ pelo método FOM (full ortogonalization method).