UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Departamento de Matemática

Gabarito da 1a. Avaliação de Cálculo IV - Noturno - 04 de Setembro de 2018

1. Seja z_* a raíz da equação $z^3 = 8\,i$ tal que $\pi/2 <\ \arg(z) < \pi$. Calcule z_*^2 e localize z_*^2 no plano complexo.

   Solução: Considera-se inicialmente, a forma polar de z e $8\,i$, ou seja, $z = re^{i\alpha}$, com $r = |z| > 0$ e $\alpha = \arg(z)$, com $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $8i = 8e^{i\pi/2}$; daí, deve-se ter:

$$z^3 = 8\,i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\alpha} = 8e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 3\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \text{ para } n = 0, 1, 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3}, \text{ para } n = 0, 1, 2 \end{cases}$$

   Nota-se que para $n = 1$ obtem-se $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$ e, portanto, $z_* = 2\,e^{i\frac{5}{6}}$ é a única raíza da equação que se encontra no segundo quadrante. Daí, segue que:

$$z_*^2 = (2\,e^{i\frac{5\pi}{6}})^2 = 4\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

   Portanto, para localizar z_*^2 no plano complexo basta notar que tal número é a interseção da circunferência $|z| = 4$ com a semi-reta $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

2. Seja a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, para $z = x + i\,y \neq 0$ e $f(0) = 1$. Determine o conjunto dos pontos onde f é contínua.

   Solução: Para $z = x + i\,y \neq 0$, nota-se que as partes real e imaginária de $f(z)$ são dadas por quocientes de funções bem-definidas e contínuas; portanto, conclui-se que f é contínua em todo $z \neq 0$; resta, portanto, analisar a continuidade de f em $z = 0$. Para tanto, é suficiente verificar se as partes real e imaginária são contínuas em $(0, 0)$. Pode-se observar que a parte imaginária de f, a função $v(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ não é contínua em $(0, 0)$ pois para pontos da forma $(0, y)$ vê-se que $v(0, y) = \dfrac{y}{0^2 + y^2} = \dfrac{y}{|y|}$ e:

$$\lim_{y \to 0^+} v(0, y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{y} = 1 \qquad \text{e} \lim_{y \to 0^-} v(0, y) = \lim_{y \to 0^-} \frac{y}{-y} = -1,$$

   ou seja, não existe $\lim_{y \to 0} v(0, y)$; portanto, $v(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$ e isto implica que f não é contínua em $z = 0$. Portanto, f é contínua em $\mathbb{C} \backslash 0$.

3. Seja a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Calcule $f'(z)$, utilizando a definição de derivada.

   Solução: Por definição, tem-se que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{[z^3 + 3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3] - z^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} [3z^2 + 3z\Delta z + (\Delta z)^2] = 3z^2.$$

4. Determine todas as funções analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $\text{Im}[f(z)] = 4xy - e^{-y}$ sen x, com $z = x + i\,y$. Expresse f na variável z.

Solução: Admita que $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, para $z = x + i\,y$ (ou seja, $v(x, y) = 4xy - e^{-y}$ sen x). Sendo f analítica, tem-se que as equações de *Cauchy-Riemann* são satisfeitas; logo, deve-se ter:

$$(a) \quad u_x(x, y) = 4x + e^{-y}\,sen\,x = v_y(x, y)$$

e

$$(b) \quad u_y(x, y) = -(4y - e^{-y}\,cos\,x) = -v_x(x, y)$$

Por (a), segue que:

$$u_x(x, y) = 4x + e^{-y}\,sen\,x \Rightarrow u(x, y) = \int [4x + e^{-y}\,sen\,x]\,dx + \varphi(y) = 2x^2 - e^{-y}\,cos\,x + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow u_y(x, y) = e^{-y}\,cos\,x + \varphi'(x) = -4y + e^{-y}\,cos\,x = -v_x(x, y) \qquad \text{(por } (b))$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -4y \Rightarrow \varphi(y) = -2y^2 + M \ \ (M \in \mathbb{R} \quad \text{const.})$$

$$\Rightarrow u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - e^{-y}\,cos\,x + M$$

Portanto, deve-se ter:

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = (2x^2 - 2y^2 - e^{-y}\,cos\,x + M) + i(4xy - e^{-y}\,sen\,x)$$

$$= (2x^2 + 4ixy - 2y^2 + M) - e^{-y}[cos\,x + i\,sen\,x] = 2(x + i\,y)^2 - e^{-y} \cdot e^{i\,x} + M = 2z^2 - e^{iz} + M.$$

5. Seja $f(z) = \text{Re}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Calcule $\int_\Gamma f(z)\,dz$ sendo:

(a) Γ o segmento de reta com ponto inicial em i e ponto final em 1;

(b) $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ e } 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: (a) Sabe-se que a equação do segmento com ponto inicial em A e ponto final em B é da forma $(1 - t)A + t\,B$, com $t \in [0, 1]$; logo, tem-se que:

$$\Gamma(t) = (1 - t)i + t \cdot 1 \Rightarrow \Gamma'(t) = 1 - i.$$

Daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)dt = \int_0^1 f((1 - t)i + t \cdot 1) \cdot (1 - i)dt = (1 - i)\int_0^1 t\,dt = (1 - i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1 - i}{2}.$$

(b) Nota-se que a curva Γ é a semi-circunferência de centro em $z_0 = 0$, com raio 2 que se encontra no semi-plano $y \geq 0$. Logo, $\Gamma(t) = 2\,cos\,t + i2\,sen\,t$, com $t \in [0, \pi]$ e assim, $\Gamma'(t) = -2\,sen\,t + i2\,cos\,t$, com $t \in [0, \pi]$. Daí, segue que:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)dt = \int_0^\pi f(2\,cos\,t + i2\,sen\,t) \cdot (-2\,sen\,t + i2\,cos\,t)dt$$

$$= \int_0^\pi (2\,cos\,t) \cdot (-2\,sen\,t + i2\,cos\,t)dt = -2\int_0^\pi 2\,sen\,t\,cos\,t\,dt + 4i\int_0^\pi cos^2\,t\,dt$$

$$= -2\int_0^\pi sen\,2t\,dt + 4i\int_0^\pi [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,cos\,2t]\,dt$$

$$= cos\,2t\Big|_0^\pi + 4i\Big[\frac{t}{2} + \frac{sen\,2t}{4}\Big]_0^\pi = [cos\,2\pi - cos\,0] + 4i \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi i.$$

6. Seja Γ a curva formada pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|2z+2i| = 1$, orientada no sentido anti-horário. Mostre que
$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z+i)^2 sen\, z}\, dz = \frac{4e\pi\, i(1+e^2)}{(1-e^2)^2}.$$

Solução: Nota-se inicialmente, que $|2z+2i| = 1 \Leftrightarrow 2|z+i| = 1 \Leftrightarrow |z-(-i)| = \frac{1}{2}$, e portanto, Γ é a circunferência de centro $-i$ e raio $\frac{1}{2}$. Além disso, colocando-se $f(z) = \dfrac{1}{sen\, z}$, tem-se que f é analítica sobre Γ e na região interna à curva Γ, pois é um quociente de funções analíticas e bem-definidas nesta região. [Observe que os zeros de $sen\, z$ encontram-se todos sobre o eixo Ox e Γ não intercepta tal eixo.]

Portanto, pode-se escrever
$$\frac{1}{(z+i)^2 sen\, z} = \frac{\frac{1}{sen\, z}}{(z-(-i))^2} = \frac{f(z)}{(z-(-i))^2}.$$

Portanto, utilizando-se a *Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas*, obtem-se que:
$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z+i)^2 sen\, z}\, dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-(-i))^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(-i).$$

Tem-se que:
$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{sen\, z}\right) = \frac{0 \cdot sen\, z - 1 \cdot cos\, z}{sen^2 z} = -\frac{cos\, z}{sen^2 z} \Rightarrow f'(-i) = -\frac{cos(-i)}{sen^2(-i)} = -\frac{cos\, i}{sen^2 i}.$$

Dado que:
$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow cos\, i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{\frac{1}{e} + e}{2} = \frac{\frac{1+e^2}{e}}{2} = \frac{1+e^2}{2e},$$

e também,
$$sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow sen\, i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{\frac{1}{e} - e}{2i} = \frac{\frac{1-e^2}{e}}{2i} = \frac{1-e^2}{2ei}$$
$$\Rightarrow sen^2 i = \frac{(1-e^2)^2}{4e^2(-1)}$$

Portanto, conclui-se que:
$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z+i)^2 sen\, z}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(-i) = -2\pi i \cdot \frac{cos\, i}{sen^2 i}$$
$$= -2\pi i \cdot \frac{\frac{1+e^2}{2e}}{\frac{(1-e^2)^2}{4e^2(-1)}} = 2\pi i \cdot \frac{2e(1+e^2)}{(1-e^2)^2} = 4e\pi i\, \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2}.$$