UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO 1 (ELABORADA PELA PROFA. TANISE C. PIERIN)

Lista 3

1. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$ sendo dados:

   (a) $\left\{ f(x) = x^2 \text{ e } p = 2 \right.$ $\quad$ (b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ p = 2 \end{cases}$ $\quad$ (c) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ p = 9 \end{cases}$ $\quad$ (d) $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ p = 1 \end{cases}$

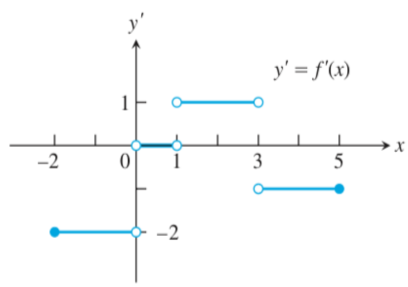
   Esboce o gráfico de cada função acima juntamente com a reta tangente no ponto p dado.

2. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

3. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f, definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1)$ não exista.

4. Use as informações a seguir para esboçar o gráfico da função f no intervalo fechado $[-2, 5]$.

   - o gráfico de f é composto por segmentos de reta fechados unidos pelas extremidades;
   - o gráfico começa no ponto $(-2, 3)$;
   - a derivada de f é a função escada de gráfico



5. Mostre que a função $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x < 1 \\ -x + 4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de g.

6. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

   (a) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$. $\quad$ (b) Esboce o gráfico de g.

7. Seja $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 1 \\ -x + 3, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

   (a) Esboce o gráfico de g. $\quad$ (b) g é derivável em $p = 1$? Por quê?

8. Calcule $g'(x)$ sendo g dada por:

   (a) $g(x) = x^6$ $\quad$ (c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ (e) $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$ $\quad$ (g) $g(x) = x$

   (b) $g(x) = x^{100}$ $\quad$ (d) $g(x) = x^{-2}$ $\quad$ (f) $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$ $\quad$ (h) $g(x) = x^{-3}$

9. Seja $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Calcule:

(a) $f'(x)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(-32)$

10. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

11. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

12. A parábola $y = 2x^2 - 13x + 5$ tem alguma reta tangente cujo coeficiente angular seja -1? Se sim, encontre uma equação para a reta e o ponto de tangência. Se não tem, dê uma justificativa de por que isso acontece.

13. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

14. Calcule $g'(x)$.

(a) $g(x) = \log_3 x$ (b) $g(x) = \log_5 x$ (c) $g(x) = \log_\pi x$ (d) $g(x) = \ln x$

15. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

16. Seja $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

(a) Determine o ponto do gráfico de f em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo Ox.

(b) Esboce o gráfico de f.

17. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

(a) Estude o sinal de $f'(x)$.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f.

18. Encontre a equação da reta normal à curva $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto $(2, 1)$.

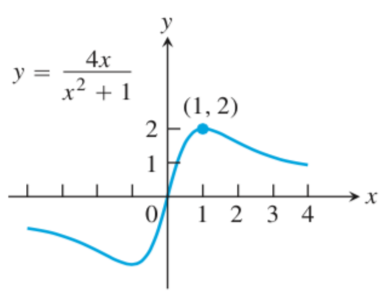
19. Determine as equações das retas tangentes à curva $y = x^3 - 3x - 2$ que são horizontais.

20. Calcule $F'(x)$ em que $F(x)$ é igual a:

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $\dfrac{3x^2+3}{5x-3}$ (e) $5x + \dfrac{x}{x-1}$ (g) $\dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}}$

(b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ (d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ (f) $\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^3+2}$ (h) $\dfrac{x+\sqrt[4]{x}}{x^2+3}$

21. Determine as equações das retas tangentes a Serpentina de Newton (cujo gráfico está abaixo) nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$.



22. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ no ponto de abscissa 0.

23. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{tg}\, x$ no ponto de abscissa 0.

24. Calcule $f'(x)$ onde $f(x)$ é igual a:

(a) $3x^2 + 5\cos x$

(b) $\dfrac{\cos x}{x^2+1}$

(c) $x\text{sen } x$

(d) $x^2\text{tg } x$

(e) $\dfrac{x+1}{\text{tg } x}$

(f) $\dfrac{3}{\text{sen } x + \cos x}$

(g) $\dfrac{\sec x}{3x+2}$

(h) $4\sec x + \text{cotg}x$

(i) $x^2 + 3x \text{ tg } x$

(j) $\dfrac{x}{\text{cossec}x}$

(k) $(x^3+\sqrt{x})\text{cossec}x$

(l) $\dfrac{x+\text{sen } x}{x-\cos x}$

25. Calcule $f'(x)$:

(a) $f(x) = x^2e^x$

(b) $f(x) = 3x + 5\ln x$

(c) $f(x) = e^x\cos x$

(d) $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

(e) $f(x) = x^2\ln x + 2e^x$

(f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x\ln x}$

(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

(h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(i) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

26. Para cada uma das funções abaixo, esboce seu gráfico e de sua derivada.

(a) $f(x) = x^2|x|$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x, \text{ se } x \leq 1 \\ 5x-1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

Gabarito da lista 3

1. (a) $y = 4x - 4$ (b) $y = -\dfrac{1}{4}x + 1$ (c) $y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{3}{2}$ (d) $y = x - 1$

2. Considere, por exemplo, $f(x) = (x-1)^2$.

3. Considere, por exemplo, $f(x) = |x-1|$.

4. $f(x) = \begin{cases} -2x-1, \text{ se } -2 \leq x < 0 \\ -1, \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ x-2, \text{ se } 1 \leq x < 3 \\ 4-x, \text{ se } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

5. Basta verificar que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = 2$ e que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = -1$, ou seja, não existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$.

6. Basta verificar que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = 2$. Em particular, $g'(1) = 2$.

7. Não é derivável em $x = 1$, pois $1 = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = -1$, ou seja, não existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$.

8. (a) $g'(x) = 6x^5$ (c) $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ (e) $g'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ (g) $g'(x) = 1$

   (b) $g'(x) = 100x^{99}$ (d) $g'(x) = -2x^{-3}$ (f) $g'(x) = -\dfrac{7}{x^8}$ (h) $g'(x) = -3x^{-4}$

9. (a) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ (b) $f'(1) = \dfrac{1}{5}$ (c) $f'(-32) = \dfrac{1}{80}$

10. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

11. $y = 4x - 4$

12. Sim. $y = -x - 13$ tangencia o gráfico da parábola em $(3, -16)$.

13. $y = x + 1$.

14. (a) $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$ (b) $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln 5}$ (c) $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln \pi}$ (d) $g'(x) = \dfrac{1}{x}$

15. $y = x - 1$.

16. $(1, 3)$.

17. (a) $f'(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < -2$ ou $x > 0$.
    (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

18. $y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{5}{4}$.

19. $y = 0$ e $y = -4$.

20. (a) $F'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

    (b) $F'(x) = 1$

    (c) $F'(x) = \dfrac{15x^2 - 18x - 15}{(5x-3)^2}$

    (d) $F'(x) = \dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

    (e) $F'(x) = 5 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$

    (f) $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\dfrac{3x}{x^3+2}\right)^2$

    (g) $F'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$

    (h) $F'(x) = \dfrac{12 - 4x^2 - 7x^{\frac{5}{4}} + 3x^{-\frac{3}{4}}}{4(x^2+3)^2}$

21. $y = 4x$ em $(0, 0)$ e $y = 2$ em $(1, 2)$.

22. $y = x$.

23. $y = x$.

24. (a) $f'(x) = 6x - 5\text{sen } x$

(b) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen } x(x^2+1) + 2x\cos x}{(x^2+1)^2}$

(c) $f'(x) = \text{sen } x + x\cos x$

(d) $f'(x) = 2x \cdot \text{tg } x + x^2 \sec^2 x$

(e) $f'(x) = \dfrac{\text{tg } x - (x+1)\sec^2 x}{\text{tg}^2\, x}$

(f) $f'(x) = \dfrac{3\text{sen } x - 3\cos x}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$

(g) $f'(x) = \dfrac{(\sec x \cdot \text{tg } x)(3x+2) - 3\sec x}{(3x+2)^2}$

(h) $f'(x) = 4\sec x \cdot \text{tg } x - \text{cossec}^2 x$

(i) $f'(x) = 2x + 3(\text{tg } x + x\sec^2 x)$

(j) $f'(x) = \text{sen } x + x\cos x$

(k) $f'(x) = \left(3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\text{cossec}x - (x^3+\sqrt{x})\text{cossec}x \cdot \text{cotg}x$

(l) $f'(x) = \dfrac{\cos x(x-1) - \text{sen } x(x+1) - 1}{(x-\cos x)^2}$

25. (a) $f'(x) = e^x(x^2+2x)$

(b) $f'(x) = 3 + \dfrac{5}{x}$

(c) $f'(x) = e^x(\cos x - \text{sen } x)$

(d) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

(e) $f'(x) = 2x\ln x + x + 2e^x$

(f) $f'(x) = -\dfrac{\ln x + x + 1}{(x\ln x)^2}$

(g) $f'(x) = e^x\left[\dfrac{x-1}{x^2+1}\right]^2$

(h) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

(i) $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

26. (a) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -3x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x \leq 1 \\ 5, & \text{se } x > 1 \end{cases}$