Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
Prof. Fernando de Ávila Silva

Primeira prova de Cálculo 1 - 18/03

- Não serão aceitas respostas sem justificativas.
- Cada questão vale 20 pontos, sendo que a nota máxima é 100 pontos.

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

Solução: Note que

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, então

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

(a) $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solução: Considere as sequências numéricas

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ e } b_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$$

para as quais temos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Note que

$$sen\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \text{ e } sen\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\lim_{n\to+\infty} sen\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} sen\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

implicando que não existe $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Determine L para que a função f abaixo seja contínua em $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}, & \text{se } x \neq 5 \\ L, & \text{se } x = 5 \end{cases}$$

Solução:

Note que

$$\begin{aligned} x-5 &= \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right], \end{aligned}$$

assim

$$\frac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2,$$

e portanto

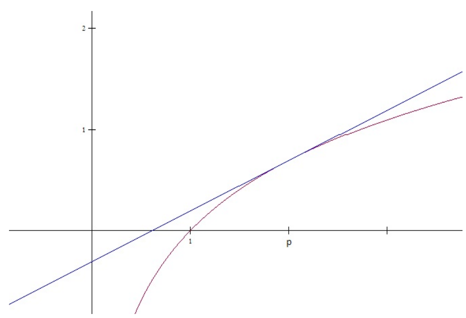
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} f(x) &= \lim_{x\to 5}\left\{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}\right\} \\ &= \lim_{x\to 5}\left\{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right\} \\ &= 3\left(\sqrt[3]{5}\right)^2. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $L = 3\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ teremos $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$ implicando em f ser contínua em $x = 5$.

3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto $(p, ln(p))$. Esboce o gráfico de f e desta reta tangente.

Solução: Note que a derivada de f num ponto p qualquer é $f'(p) = \dfrac{1}{p}$, assim a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, ln(p))$ é dada por

$$y - ln(p) = \frac{1}{p}(x-p).$$



4. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solução:
Note que

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1 = x^3\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1 = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right),$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;\text{ e }\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

(b) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

Solução:

Temos que

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2),$$

logo

$$f'(x) < 0, \text{ sempre que } -2 < x < 0$$

e

$$f'(x) > 0, \text{ sempre que } x < -2 \text{ e } x > 0.$$

Portanto, f é crescente no intervalos $(-\infty, -2)$ e $(0, +\infty)$. Por outro lado, f é decrescente no intervalo $(-2, 0)$.

(c) Obtenha os pontos de máximo e mínimo de f no intervalo $(-4, 1)$.

Solução:

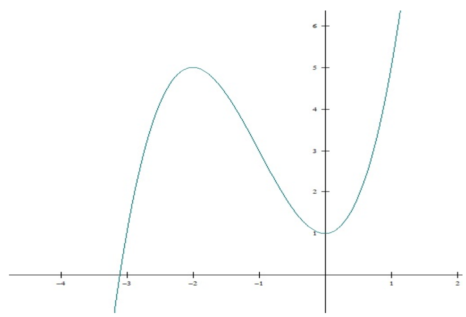
Temos $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = -2$. Assim, os pontos críticos de f no intervalo $(-4, 1)$ são -2 e 0. Uma vez que $f''(x) = 6x + 6$, então:

$$f''(-2) = -6 < 0 \Longrightarrow -2 \text{ ponto de máximo;}$$

$$f''(0) = 6 < 0 \Longrightarrow 0 \text{ ponto de mínimo.}$$

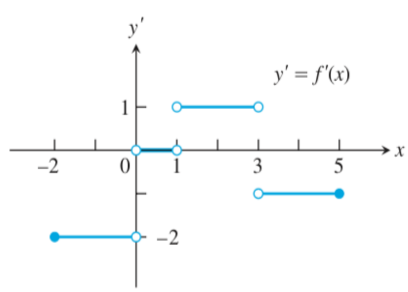
(d) Utilizando as informações acima, faça um esboço do gráfico de f.

Solução:



5. Use as informações a seguir para esboçar o gráfico de uma função f no intervalo fechado $[-2, 5]$.

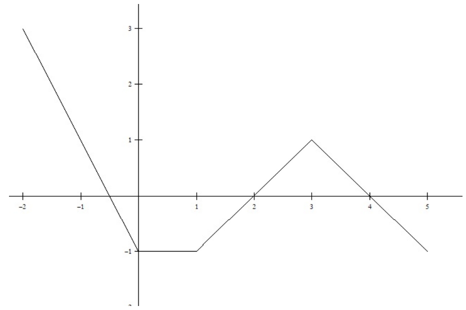
- o gráfico de f é composto por segmentos de reta fechados unidos pelas extremidades;
- $f(-2) = 3$;
- a derivada de f é a função escada de gráfico



Solução:

Temos que:

- f' é negativa no intervalo $I_1 = [-2, 0)$, logo f deve ser decrescente em I_1.
- f' é constante e igual a zero no intervalo $I_2 = (0, 1)$, logo f deve ser constante em I_2.
- f' é positiva no intervalo $I_3 = (1, 3)$, logo f deve ser crescente em I_3.
- f' é negativa no intervalo $I_4 = (3, 5]$, logo f deve ser decrescente em I_4.



6. Considere a função $h(x) = f(x)^{g(x)}$, em que f e g são funções deriváveis em um intervalo A, com $f(x) > 0$ para todo $x \in A$.

   (a) Mostre que
$$h'(x) = f(x)^{g(x)} g'(x)\ln(f(x)) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x),\ \forall x \in A. \tag{1}$$

   Solução:
   Note que
$$h(x) = e^{g(x)\ln(f(x))},$$
   logo aplicando regra da cadeia chega-se em
$$h'(x) = e^{g(x)\ln(f(x))} \cdot \frac{d}{dx}(g(x)\ln(f(x)).$$
   Derivando o produto $g(x)\ln(f(x))$ o obtemos
$$g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(ln(f(x)).$$
   Aplicando a regra da cadeia em $\frac{d}{dx}(ln(f(x))$:
$$\frac{d}{dx}(ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
   Combinando essas expressões teremos
$$\begin{aligned}
h'(x) &= e^{g(x)\ln(f(x))} \cdot \frac{d}{dx}(g(x)\ln(f(x))\\
&= e^{g(x)\ln(f(x))}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(ln(f(x))\right]\\
&= e^{g(x)\ln(f(x))}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\\
&= f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\\
&= f(x)^{g(x)}g'(x)\ln(f(x)) + f(x)^{g(x)}g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\\
&= f(x)^{g(x)}g'(x)\ln(f(x)) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)
\end{aligned}$$

   (b) Utilizando a expressão (1) obtenha a derivada de $h(x) = a^{g(x)}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

   Solução:
   Se $f(x) \equiv a$, então $f'(x) \equiv 0$, logo
$$\begin{aligned}
h'(x) &= f(x)^{g(x)}g'(x)\ln(f(x)) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)\\
&= f(x)^{g(x)}g'(x)\ln(f(x))\\
&= a^{g(x)}g'(x)\ln(a).
\end{aligned}$$

(c) Utilizando a expressão (1) obtenha a derivada de de $h(x) = [f(x)]^c$, sendo c uma constante qualquer.

Solução:

Se $g(x) \equiv c$, então $g'(x) \equiv 0$, logo

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)^{g(x)} g'(x) \ln(f(x)) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x) \\ &= g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x) \\ &= c f(x)^{c-1} f'(x) \end{aligned}$$

(d) Obtenha a derivada da função $h(x) = \pi^x$.

Solução:

Temos $f(x) \equiv \pi$ e $g(x) = x$, logo pelo item (b):

$$h'(x) = \pi^x \ln(\pi).$$