

# MATE 7010

## Equações Diferenciais Ordinárias

### S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva  
Dep. de Matemática - UFPR



**13 DE ABRIL**

## Aula de hoje: Exponencial de matrizes II - Forma de Jordan

- Blocos de Jordan.
- Classificação de sistemas  $3 \times 3$ .

## EXPONENCIAL DE MATRIZES

### RELEMBRANDO...

Relembramos que a série

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

converge uniformemente em cada intervalo compacto. Além disso:

- (a)  $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$ , com  $e^0 = I$ ;
- (b)  $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$ , para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (d) Se  $BC = CA$ , então  $e^{tB}C = Ce^{tA}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- (e) Se  $AB = BA$ , então

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

## PROPOSIÇÃO

- Sejam  $A, B \in M(n)$  tais que  $A \sim_Q B$ . Então:
  - (a)  $e^A = Qe^BQ^{-1}$ ;
  - (b) se  $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ , então  $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$ ;
  - (c) se  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ , então  $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$
- Se  $A$  é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é,  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ , então  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$ .

## PROPOSIÇÃO

- Sejam  $A, B \in M(n)$  tais que  $A \sim_Q B$ . Então:
  - $e^A = Qe^BQ^{-1}$ ;
  - se  $B = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ , então  $e^A = Q\text{diag}(e^{\kappa_1}, \dots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$ ;
  - se  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ , então  $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$
- Se  $A$  é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é,  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ , então  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_m})$ .
- Se  $E$  é uma matriz nilpotente, ou seja, existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tal que  $A^\ell = 0$ , então  $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{E^k}{k!}$ .
- Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $J(\lambda) = \lambda I + E$ , sendo  $E$  a matriz nilpotente

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

## BLOCOS DE JORDAN

- Para um número real  $\lambda$  definimos por  $J_\lambda(\ell) \in M(\ell)$  o **bloco de Jordan real** e tamanho  $\ell$ .
- Para um número complexo  $\gamma = a + ib$  definimos por  $J_{a,b}(\ell) \in M(2\ell)$  o **bloco de Jordan complexo** e tamanho  $2\ell$ .

## BLOCOS DE JORDAN

- Para um número real  $\lambda$  definimos por  $J_\lambda(\ell) \in M(\ell)$  o **bloco de Jordan real** e tamanho  $\ell$ .
- Para um número complexo  $\gamma = a + ib$  definimos por  $J_{a,b}(\ell) \in M(2\ell)$  o **bloco de Jordan complexo** e tamanho  $2\ell$ .
- Geometricamente:

$$J_\lambda(\ell) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_{a,b}(\ell) = \begin{bmatrix} J_{a,b} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & J_{a,b} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & J_{a,b} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & J_{a,b} \end{bmatrix},$$

sendo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

## FORMA CANÔNICA DE JORDAN

### TEOREMA (FORMA CANÔNICA DE JORDAN)

Se  $A \in M(n)$ , então  $A \sim_Q J$  em que

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M(n),$$

sendo que cada  $J_i$  é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz  $J$  é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.



## FORMA CANÔNICA DE JORDAN

### TEOREMA (FORMA CANÔNICA DE JORDAN)

Se  $A \in M(n)$ , então  $A \sim_Q J$  em que

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r) \in M(n),$$

sendo que cada  $J_i$  é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz  $J$  é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

### NOTE ENTÃO QUE

$$e^A = Qe^J Q^{-1} = Q \text{diag}(e^{J_1}, e^{J_2}, \dots, e^{J_r}) Q^{-1}$$

e que para  $J_{a,b}$  temos

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} e^a \cos(b) & e^a \sin(b) \\ -e^a \sin(b) & e^a \cos(b) \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2 + i$  e  $\lambda_3 = -2 - i$ , logo

$$J_1(1) = [1], J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

## EXEMPLO

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2 + i$  e  $\lambda_3 = -2 - i$ , logo

$$J_1(1) = [1], J_{-2,1}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Assim,

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} \cos(1) & e^{-2} \sin(1) \\ 0 & -e^{-2} \sin(1) & e^{-2} \cos(1) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

# EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN REAL

## EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN REAL

- Para um bloco real  $J_\lambda(\ell)$  temos que

$$J_\lambda(\ell) = \lambda I_{\ell \times \ell} + G_1(\ell),$$

com  $G_1(\ell)^\ell = 0$ .

## EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN REAL

- Para um bloco real  $J_\lambda(\ell)$  temos que

$$J_\lambda(\ell) = \lambda I_{\ell \times \ell} + G_1(\ell),$$

com  $G_1(\ell)^\ell = 0$ .

- Uma vez que  $\lambda I_{\ell \times \ell}$  comuta com  $G_1(\ell)$ , então

$$e^{J_\lambda(\ell)} = e^{\lambda I} e^{G_1(\ell)}$$

$$= e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!} & \frac{1}{(\ell-2)!} & \frac{1}{(\ell-3)!} & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M(\ell).$$

## EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN COMPLEXO

- Para um bloco real  $J_\lambda(\ell)$ , escrevamos  $J_\lambda(\ell) = J_\lambda^0(\ell) + G_{c,I}(\ell)$ , sendo  $J_\lambda^0(\ell) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in M(2\ell)$  e

$$G_{c,I}(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & cI & 0 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

## EXPONENCIAIS DE BLOCOS: BLOCO DE JORDAN COMPLEXO

- Para um bloco real  $J_\lambda(\ell)$ , escrevamos  $J_\lambda(\ell) = J_\lambda^0(\ell) + G_{c,I}(\ell)$ , sendo  $J_\lambda^0(\ell) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in M(2\ell)$  e

$$G_{c,I}(\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & cI & 0 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Uma vez que  $G_{c,I}^\ell(\ell) = 0$ , então

$$e^{G_{c,I}(\ell)} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cI & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!}I & cI & I & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!}I & \frac{c^2}{2!}I & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{c^{\ell-1}}{(\ell-1)!}I & \frac{c^{\ell-2}}{(\ell-2)!}I & \frac{c^{\ell-3}}{(\ell-3)!}I & \dots & cI & I \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$



- Note que  $e^{J_{a,b}} = e^a R_b$ , sendo

$$R_b = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}.$$

- Note que  $e^{J_{a,b}} = e^a R_b$ , sendo

$$R_b = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}.$$

- Assim,

$$e^{J_{a,b}^{(\ell)}} = e^a \text{diag}(R_b, R_b, \dots, R_b).$$

- Agora, temos que  $J_{a,b}^0(\ell)$  comuta com  $G_{1,I}(\ell)$ , donde  $e^{J_{a,b}} = e^{J_{a,b}^0(\ell)} e^{G_{1,I}(\ell)}$  e então

$$e^{J_{a,b}} = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} R_b & R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} R_b & \frac{1}{2!} R_b & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(\ell-1)!} R_b & \frac{1}{(\ell-2)!} R_b & \frac{1}{(\ell-3)!} R_b & \dots & R_b & R_b \end{bmatrix}$$

## EXEMPLO

- Os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

são  $\lambda_{1,2,3} = -1$ ,  $\lambda_4 = -2 + i$  e  $\lambda_5 = -2 - i$ , logo

$$J_{-1}(3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } J_{-2,i}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e^{-1}}{2} & e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2} \cos(1) & e^{-2} \sin(1) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2} \sin(1) & e^{-2} \cos(1) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

## SOLUÇÕES DE $x' = Ax$

- Note que a solução do problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é então

$$x(t)e^{At}x_0 = Qe^{Jt}Q^{-1}x_0 = Q \text{diag} (e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots, e^{J_rt}) Q^{-1}x_0$$

## SOLUÇÕES DE $x' = Ax$

- Note que a solução do problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

é então

$$x(t)e^{At}x_0 = Qe^{Jt}Q^{-1}x_0 = Q \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_r t}) Q^{-1}x_0$$

- Para um bloco real  $J_\lambda(\ell)$  temos  $e^{tJ_\lambda(\ell)} = e^{\lambda t} e^{G_t(\ell)}$ , sendo

$$e^{G_t(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell-3)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix} \in M(2\ell).$$

- Para um bloco complexo teremos  $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$ , donde

$$e^{tJ_{a,b}} = e^{J_{ta,tb}} = e^{at} R_{tb}$$

- Para um bloco complexo teremos  $tJ_{a,b} = J_{ta,tb}$ , donde

$$e^{tJ_{a,b}} = e^{J_{ta,tb}} = e^{at} R_{tb}$$

- Assim:

$$e^{tJ_{a,b}(\ell)} = e^{at} \begin{bmatrix} R_{bt} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_{bt} & R_{bt} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} R_{bt} & R_{bt} & R_{bt} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} R_{bt} & \frac{t^2}{2!} R_{bt} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} R_{bt} & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} R_{bt} & \frac{t^{\ell-3}}{(\ell-3)!} R_{bt} & \dots & R_{bt} & R_{bt} \end{bmatrix},$$

sendo

$$R_{bt} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

## EXEMPLO

- Para o sistema  $x' = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ , com

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & -14 & 9 & -4 \\ -3 & -9 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = Q e^{tJ} Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \cos(t) & e^{-2t} \sin(t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2t} \sin(t) & e^{-2t} \cos(t) \end{pmatrix} Q^{-1} x_0 \end{aligned}$$



## TEOREMA

Seja  $A \in M(n)$  uma matriz qualquer. Cada coordenada de qualquer solução de  $x' = Ax$  é uma combinação linear das funções

$$t \mapsto t^j e^{at} \cos(bt) \text{ e } t \mapsto t^j e^{at} \sin(bt)$$

com  $0 \leq j \leq n - 1$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $\lambda = a + ib$  é um autovalor de  $A$ .

## SISTEMAS DINÂMICOS (UMA LIGEIRA IDEIA)

- Um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijetiva diferenciável com inversa também diferenciável. Denotemos por  $\text{Dif}(n)$  o conjunto dos difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ .
- Note que  $\text{Dif}(n)$  é um grupo com a composição de funções.

## SISTEMAS DINÂMICOS (UMA LIGEIRA IDEIA)

- Um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijetiva diferenciável com inversa também diferenciável. Denotemos por  $\text{Dif}(n)$  o conjunto dos difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ .
- Note que  $\text{Dif}(n)$  é um grupo com a composição de funções.

### DEFINIÇÃO

Um **sistema dinâmico** agindo sobre  $\mathbb{R}^n$  é um homomorfismo de grupos  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Dif}(n)$ , ou seja, uma aplicação tal que

$$\Phi(t + s) = \Phi(t) \circ \Phi(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a família  $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  é um **grupo a um parâmetro** de difeomorfismos.

## SISTEMAS DINÂMICOS (UMA LIGEIRA IDEIA)

- Um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bijetiva diferenciável com inversa também diferenciável. Denotemos por  $\text{Dif}(n)$  o conjunto dos difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ .
- Note que  $\text{Dif}(n)$  é um grupo com a composição de funções.

### DEFINIÇÃO

Um **sistema dinâmico** agindo sobre  $\mathbb{R}^n$  é um homomorfismo de grupos  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Dif}(n)$ , ou seja, uma aplicação tal que

$$\Phi(t + s) = \Phi(t) \circ \Phi(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a família  $\{\Phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  é um **grupo a um parâmetro** de difeomorfismos.

### EXEMPLO

Dada uma matriz  $A \in M(n)$ , temos que

$$\Phi(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é um sistema dinâmico.

## RETRATO DE FASE $3 \times 3$

- Considere um sistema  $x' = Ax$ , com  $A \in M(3)$ , de modo que a forma de Jordan de  $A$  possua dois blocos  $J_1 = [1]$  e  $J_2$  de tamanhos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ , respectivamente. Pelo que vimos, temos

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix}.$$

- Denote por  $V_1$  o auto-espaço gerado pelo autovalor  $\lambda_1 = 1$  e por  $V_2$  aquele gerado pelo(s) autovalor(es) em  $J_2$ .

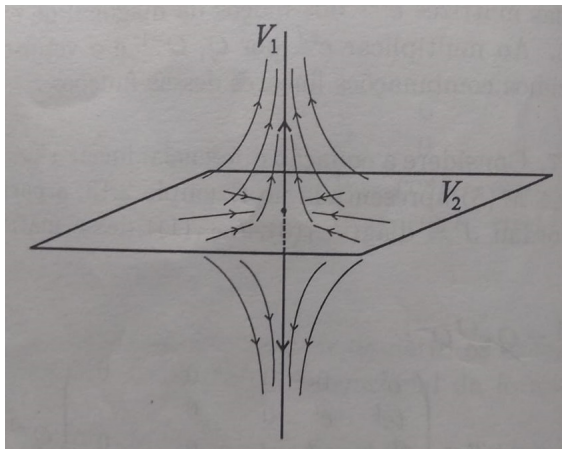
## RETRATO DE FASE $3 \times 3$

- Considere um sistema  $x' = Ax$ , com  $A \in M(3)$ , de modo que a forma de Jordan de  $A$  possua dois blocos  $J_1 = [1]$  e  $J_2$  de tamanhos  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ , respectivamente. Pelo que vimos, temos

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix}.$$

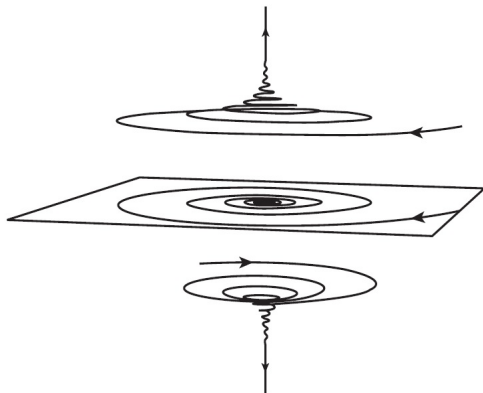
- Denote por  $V_1$  o auto-espaço gerado pelo autovalor  $\lambda_1 = 1$  e por  $V_2$  aquele gerados pelo(s) autovalor(es) em  $J_2$ .
- Note que em  $V_1$  teremos as soluções indo para  $+\infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .
- Vamos analisar algumas possibilidades de retrato de fase...

## CASO 1: AUTOVALORES REAIS E NEGATIVOS

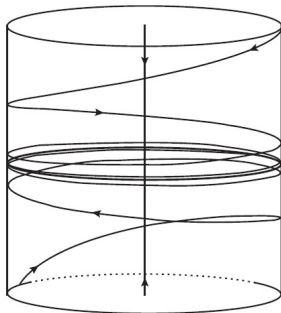
**CASO 1: AUTOVALORES REAIS E NEGATIVOS**



**CASO 2: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS COM  $a < 0$**

**CASO 2: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS COM  $a < 0$** 

## CASO 3: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

**CASO 3: AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS**Figura:  $\lambda_1 = -1$