

MATE 7010

Equações Diferenciais Ordinárias

S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



25 DE ABRIL

Aula de hoje: Teorema do fluxo tubular

- Trajetórias e fluxo
- Fluxo tubular

RELEMBRANDO

TEOREMA (1)

Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 sobre o aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{A}$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

definida num intervalo maximal (aberto) $I_0 = (\alpha, \beta)$ que contém t_0 .

OBSERVAÇÃO

OBSERVAÇÃO

- (a) Se $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

OBSERVAÇÃO

- (a) Se $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.
- (b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:
- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.

OBSERVAÇÃO

- (a) Se $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.
- (b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:
- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.
- (c) Note que se φ é uma solução de $x' = f(x)$ definida em $I \subset \mathbb{R}$, então dado $t^* \in \mathbb{R}$ temos que $\varphi^*(t) = \varphi(t + t^*)$ também é uma solução, agora definida no intervalo $J^* = I - t^*$.

OBSERVAÇÃO

- (a) Se $x_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, são duas soluções do problema (1) definidas em intervalos $I_i \subseteq \mathbb{R}$, então $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.
- (b) Dado qualquer compacto $\mathcal{K} \subset U$, são verdadeiras as seguintes afirmações:
- Se $\beta < \infty$, então existe $t_0 < t^* < \beta$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $-\infty < \alpha$, então existe $\alpha < t^* < t_0$ tal que $(t^*, x(t^*)) \in U \setminus \mathcal{K}$.
 - Se $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ e $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução tal que $\{\|x(t)\|, \forall t \in I\}$ é limitado, então $I = \mathbb{R}$.
- (c) Note que se φ é uma solução de $x' = f(x)$ definida em $I \subset \mathbb{R}$, então dado $t^* \in \mathbb{R}$ temos que $\varphi^*(t) = \varphi(t + t^*)$ também é uma solução, agora definida no intervalo $J^* = I - t^*$.
- (d) Em particular, podemos sempre considerar (1) com a condição inicial $x(0) = x_0$.

DEFINIÇÃO (FLUXO)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \in I(x), x \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t, x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s, x)) ds.$$

DEFINIÇÃO (FLUXO)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \in I(x), x \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t, x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s, x)) ds.$$

TEOREMA (2)

Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, então Ω é um aberto e ϕ é de classe C^k .

DEFINIÇÃO (FLUXO)

Para cada $x \in \mathcal{A}$ considere $I(x)$ o intervalo maximal da solução máxima do problema $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Ponha

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \in I(x), x \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

O fluxo de f é, por definição, a aplicação $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t, x) = x(t) = x + \int_0^t f(\phi(s, x)) ds.$$

TEOREMA (2)

Se $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, então Ω é um aberto e ϕ é de classe C^k .

PROPOSIÇÃO (1)

Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , então

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x),$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{A}$ tais que $s, t + s \in I(x)$.

TRAJETÓRIA (ÓRBITA)

DEFINIÇÃO

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x .

TRAJETÓRIA (ÓRBITA)

DEFINIÇÃO

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x .

PROPOSIÇÃO (2)

Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

TEOREMA (3)

O fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação que satisfaz a equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}.$$

Além disso:

- (a) para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\phi_t = \phi(t, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é um difeomorfismo de classe C^1 de \mathcal{A} sobre \mathcal{A} ;
- (b) vale a a propriedade de grupo

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$$

- (c) para cada $t \in \mathbb{R}$, ϕ_{-t} é a aplicação inversa de ϕ_t ;
- (d) $\phi_0 = id|_{\mathcal{A}}$.

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.

CLASSIFICAÇÃO DE TRAJETÓRIAS

DEFINIÇÃO

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica:** se existe $T > 0$ tal que $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica:** $\phi(t, x) \neq \phi(s, x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária:** $\phi(t, x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

OBSERVAÇÃO

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

PROPOSIÇÃO (3)

Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a trajetória de algum ponto $q \in \mathcal{A}$. Se existe

$$\lim_{t \rightarrow b} \phi(t, q) = p \in \mathcal{A},$$

então $b = \infty$ e p é estacionário.

CAMPO LAMINAR

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \dots, y_2) = (1, 0, \dots, 0)$$

CAMPO LAMINAR

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$$

- Note que o fluxo ϕ de F é dado por

$$\phi(t, y) = (t + y_1, y_2, \dots, y_n).$$

CAMPO LAMINAR

- Considere o campo constante $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(y_1, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$$

- Note que o fluxo ϕ de F é dado por

$$\phi(t, y) = (t + y_1, y_2, \dots, y_n).$$

- Como fica a representação geométrica de ϕ ?

DEFINIÇÃO

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se existem:

- (i) uma vizinhança aberta \mathcal{U} de x_0 em \mathcal{A} ,

DEFINIÇÃO

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se existem:

- (i) uma vizinhança aberta \mathcal{U} de x_0 em \mathcal{A} ,
- (ii) um aberto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,

DEFINIÇÃO

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se existem:

- (i) uma vizinhança aberta \mathcal{U} de x_0 em \mathcal{A} ,
- (ii) um aberto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,
- (iii) um $r > 0$ e um difeomorfismo

$$g : \mathcal{U} \rightarrow (-r, r) \times \mathcal{W}$$

que conjuga o fluxo ϕ de f em \mathcal{U} com o fluxo ψ do campo laminar F em \mathcal{W} , ou seja,

$$g(\phi(t, x)) = \psi(t, g(x)), \quad \forall t \in (-r, r), \forall x \in \mathcal{U}.$$

DEFINIÇÃO

Dizemos que $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto com a **propriedade do fluxo tubular** do campo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se existem:

- (i) uma vizinhança aberta \mathcal{U} de x_0 em \mathcal{A} ,
- (ii) um aberto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$,
- (iii) um $r > 0$ e um difeomorfismo

$$g : \mathcal{U} \rightarrow (-r, r) \times \mathcal{W}$$

que conjuga o fluxo ϕ de f em \mathcal{U} com o fluxo ψ do campo laminar F em \mathcal{W} , ou seja,

$$g(\phi(t, x)) = \psi(t, g(x)), \quad \forall t \in (-r, r), \forall x \in \mathcal{U}.$$

EXEMPLO

Dados $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $f(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$g(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right), x_2 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - x_2^0 \right), \quad x_1^0 \neq 0.$$

TEOREMA DO FLUXO TUBULAR

Seja $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in \mathcal{A}$ é um ponto regular, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.

