MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

06 DE JUNHO

Aula de hoje: Teorema de Poincaré-Bendixson

Trajetória (Órbita)

Definição

Chamamos de **trajetória** (ou **órbita**) de um ponto $x \in \mathcal{A}$ a solução maximal $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ da equação $x' = f(x)$ com condição inicial $x(0) = x$. Por vezes, nos referimos a imagem

$$\mathcal{O}_x = \{\varphi_x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

como sendo a trajetória de x.

Proposição

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Então, duas órbitas nunca se interceptam, a menos que sejam a mesma trajetória (módulo uma translação no tempo).

Classificação de trajetórias

Definição

As trajetórias de uma equação autônoma $x' = f(x)$ são classificadas em três tipos:

- **trajetória periódica**: se existe $T > 0$ tal que $\phi(t+T,x) = \phi(t,x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto periódico;
- **trajetória regular não periódica**: $\phi(t,x) \neq \phi(s,x)$, para todo $t \neq s$. Neste caso, dizemos que x é um ponto regular não periódico;
- **trajetória estacionária**: $\phi(t,x) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que x é um ponto estacionário.

Observação

- Órbitas estacionárias são, por definição, periódicas. Porém, ao nos referirmos especificamente a uma órbita periódica estaremos excluindo o caso estacionário.
- Note que $x \in \mathcal{A}$ é estacionário se, e somente se, $f(x) = 0$.
- Um ponto estacionário também é chamado de **ponto singular**.
- Singularidades também são chamadas de **ponto de equilíbrio**.

CONJUNTOS ω-LIMITE E α-LIMITE

DEFINIÇÃO

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^d$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^d$. Dado um ponto $x \in \mathcal{A}$ definimos os conjuntos

$$\omega(x) = \{p \in \mathcal{A};\ \text{ existe } \ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{ tal que } \ t_n \to +\infty \ \text{ e } \ \phi(t_n, x) \to p\}$$

e

$$\alpha(x) = \{p \in \mathcal{A};\ \text{ existe } \ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{ tal que } \ t_n \to -\infty \ \text{ e } \ \phi(t_n, x) \to p\}$$

chamados de **conjunto ω-limite** e **conjunto α-limite**, respectivamente.

Definição

Um conjunto $C \subseteq \mathcal{A}$ é **invariante** pelo fluxo ϕ se $\phi(t,p) \in C$, para todo $p \in C$ e todo $t \in \mathbb{R}$. De modo mais preciso, diremos **positivamente invariante** se for para todo $t \geq 0$ e **negativamente invariante** se for para todo $t \leq 0$.

Proposição (1)

(a) Se y pertence a órbita de x, então $\omega(x) = \omega(y)$.

(b) O conjunto $\omega(x)$ é fechado e invariante.

(c) Se $F \subseteq \mathcal{A}$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $\omega(x) \in F$, para todo $x \in F$.

(d) Se $z \in \omega(x)$, então $\omega(z) \subseteq \omega(x)$.

(e) Se $\omega(x)$ é compacto, então é conexo.

Corolário (1)

(a) Se a órbita de f por x é periódica, então $\omega(x)$ é a própria órbita periódica.

(b) Se $\{\phi(t,x),\ t \geq 0\}$ é limitado, então $\omega(x)$ é não vazio.

O teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema (Poincaré-Bendixson)

Seja $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo planar de classe C^1 cujas soluções de $x' = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$. Nestas condições, os únicos conjuntos ω-limite compactos, não vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas do campo.

O teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema (Poincaré-Bendixson)

Seja $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo planar de classe C^1 cujas soluções de $x' = f(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$. Nestas condições, os únicos conjuntos ω-limite compactos, não vazios e sem singularidades são as órbitas periódicas do campo.

Corolário

Nas condições do teorema, um conjunto compacto, não vazio e invariante contém, pelo menos, uma singularidade ou uma órbita periódica.

Definição

Sejam $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{A}$ um ponto regular, ($f(x_0) \neq 0$) e V um subespaço de dimensão $n-1$. Diremos que o hiperplano

$$H = x_0 + V$$

é transversal a f em x_0 se $f(x_0) \notin V$.

- Grosso modo, colocamos em x_0 um hiperplano H e pedimos que $f(x_0) \notin H$.
- Por continuidade, existe uma vizinhança W de x_0 tal que se $x \in H \cap W$, então $f(x) \notin H$.

Definição

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Uma **seção transversal local** (ou simplesmente seção local) de f em $x_0 \in \mathcal{A}$ é um conjunto $S = W \cap H \subset \mathcal{A}$ tal que W é um vizinhança de x_0 e H é um hiperplano transversal em x_0 tal que:

$$x \in S \Longrightarrow f(x) \notin H.$$

Proposição (2)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Temos:

(a) Existe uma seção transversal local conexa em cada ponto regular de f;

(b) Se S é uma seção de f em x_0, então $f(x) \neq 0$, para cada $x \in S$;

(c) Se S é uma seção conexa, então os vetores $f(x)$, com $x \in S$, apontam todos para o mesmo lado de S em $\mathbb{R}^n$.

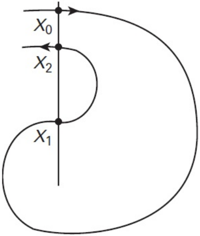


Figura: Não ocorre numa seção

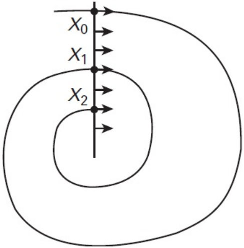


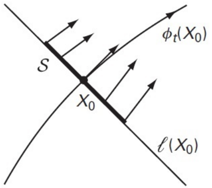
Figura: Como deve ser em uma seção

Campos planares

Observação

- Para um campo planar $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ no aberto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ podemos pensar na seção transversal, num ponto regular, como sendo a intercessão de uma vizinhança com uma reta **perpendicular** ao vetor $f(x_0)$.
- Podemos parametrizar tal reta: tomamos um vetor unitário v_0 em x_0 e a função

$$h(u) = x_0 + uv_0, \;\; u \in \mathbb{R}.$$



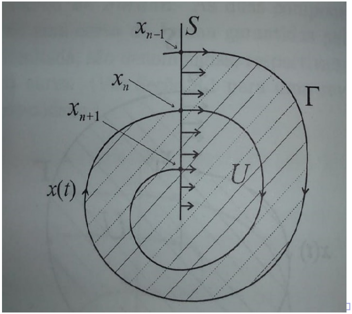
Sequências monótonas

Lema

Seja $x \in \mathcal{S}$ um ponto de uma seção local de f. Se a trajetória $x(t) = \phi(t, x)$ de f por x bater em $\mathcal{S}$ para tempos crescentes

$$0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$$

então a sequência de pontos $x_n = \phi(t_n, x)$ é **monótona** em $\mathcal{S}$, no seguinte sentido: no segmento $\mathcal{S}$, x_n está sempre entre x_{n-1} e x_{n+1}. Além disso, existem $t_n < t_{n+1}$ tais que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, a trajetória é periódica.



Preliminares

PRELIMINARES

PROJEÇÃO PELO FLUXO

Considere uma vizinhança tubular que é cortada em duas por uma seção transversal local. Cada segmento de trajetória nessa vizinhança tem um único ponto bem determinado na seção que é a **projeção pelo fluxo** de cada um dos pontos do segmento.

Preliminares

Projeção pelo fluxo

Considere uma vizinhança tubular que é cortada em duas por uma seção transversal local. Cada segmento de trajetória nessa vizinhança tem um único ponto bem determinado na seção que é a **projeção pelo fluxo** de cada um dos pontos do segmento.

Proposição (3)

Um conjunto ω-limite de um campo planar não pode intersectar uma seção local do campo em mais do que um ponto.

PRELIMINARES

PROJEÇÃO PELO FLUXO

Considere uma vizinhança tubular que é cortada em duas por uma seção transversal local. Cada segmento de trajetória nessa vizinhança tem um único ponto bem determinado na seção que é a **projeção pelo fluxo** de cada um dos pontos do segmento.

PROPOSIÇÃO (3)

Um conjunto ω-limite de um campo planar não pode intersectar uma seção local do campo em mais do que um ponto.

PROPOSIÇÃO (4)

Se o conjunto ω-limite de um ponto de um campo planar é compacto e contém uma órbita periódica, então esse conjunto ω-limite coincide com a órbita periódica

CAMPOS EM ABERTOS SIMPLESMENTE CONEXOS

Campos em abertos simplesmente conexos

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é dito **simplesmente conexo** se o interior de cada curva de Jordan contida em A é contido em A.

Campos em abertos simplesmente conexos

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é dito **simplesmente conexo** se o interior de cada curva de Jordan contida em A é contido em A.

Teorema (de Bendixson)

Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 no aberto simplesmente conexo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$. Se existe uma órbita periódica, então ou

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

é identicamente nulo ou troca de sinal em $\mathcal{A}$.

Exemplo

- O campo $f(x,y) = (y - x^3, -x^3)$ não possui órbitas periódicas.

Exemplo

- O campo $f(x, y) = (y - x^3, -x^3)$ não possui órbitas periódicas.