

MATE 7010

Equações Diferenciais Ordinárias

S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



Aula de hoje: Existência e unicidade das soluções (Parte II)

- Teorema de Picard-Lindelöf
- Teorema de Cauchy-Peano
- T.E.U.
- T.E.U. para equações autônomas.

O GRANDE OBJETIVO

TEOREMA (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua no aberto U . Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

SOBRE A NOTAÇÃO

- Como $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ denota a função

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow M(n),$$

dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right]_{n \times n} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t, x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(t, x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(t, x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(t, x) \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

- Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em U se, e somente se, cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ é contínua em U .

ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Uma norma em $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto e $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então temos a norma (da convergência uniforme)

$$\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\| = \max_{x \in I} \|f(x)\|.$$

Proposição

O espaço $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é completo quando munido da norma da convergência uniforme.

PONTO DE FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES

TEOREMA

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se $L : M \rightarrow M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(L(x), L(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

então L tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $\hat{x} \in M$ tal que $L(\hat{x}) = \hat{x}$.

COROLÁRIO

Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $L : M \rightarrow M$ uma função. Se existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que L^k é uma contração, então L possui um único ponto fixo $a \in M$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(\mu) = a, \quad \forall \mu \in M.$$

(Dem: Corolário 8.6 no livro do Lopes) (Dem: Corolário da página 13 no livro do Soto)

A HIPÓTESE LIPSCHITZ

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana na variável espacial em U se existe $K > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

HIPÓTESE

Suponha que tenhamos um intervalo I tal que $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \subset U$.

- Para cada $y \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, defina

$$Ty(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I. \quad (2)$$

- Note que x é solução de (17) se, e somente se, $Tx = x$.

- Note que $Ty \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, ou seja, $T : \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$.
- Mais ainda, se supormos que I é um intervalo compacto, então $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo (ou um espaço de Banach).

LEMA

Seja $K > 0$ uma constante de Lipschitz de f em $I \times \mathbb{R}^n$. Então, dado $m \in \mathbb{N}_0$,

$$|T^m g(t) - T^m h(t)| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m \|g - h\|,$$

para quaisquer $g, h \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ e todo $t \in T$.

UM PRIMEIRO RESULTADO

TEOREMA 1

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Assuma que $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subset U$ e que f é lipschitziana na variável espacial em $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Nestas condições, dados qualquer ponto $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

definida no intervalo $[a, b]$.

APLICAÇÃO

TEOREMA 2

Sejam $A : I \rightarrow M(n)$ e $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois caminhos contínuos num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Então, dados quaisquer $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo I .

COROLÁRIO

Se $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$ é uma matriz real, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe única solução do P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

definida em \mathbb{R} .

O CASO GERAL PARA $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- Voltemos a supor $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em que U não necessariamente contém uma faixa vertical.

RETÂNGULO

Dados $(t_0, x_0) \in U$, podemos escolher $a, b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b$$

esteja contido em U , sendo

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \text{ e } B_b = B[x_0, b].$$

ESPAÇO DE FUNÇÕES

Para a e b escolhidos acima, denotaremos por $\mathcal{F} = \mathcal{C}(I_a; B_b)$ o espaço das funções contínuas de I_a em B_b . Note que \mathcal{F} é completo quando munido da norma da convergência uniforme.

PICARD-LINDELÖF

PROPOSIÇÃO

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e M uma constante positiva satisfazendo

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad \forall (t, x) \in R_{a,b}.$$

Definindo

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (4)$$

tem-se $T : \mathcal{C}(I_\alpha; B_b) \rightarrow \mathcal{C}(I_\alpha; B_b)$.

TEOREMA (PICARD-LINDELÖF)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$. Se f é lipschitziana em $R_{a,b}$, então existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, sendo α como em (4).

FINALMENTE, O T.E.U.

PROPOSIÇÃO

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U . Dados $(t_0, x_0) \in U$ e o retângulo $R_{a,b}$, existe uma constante $K > 0$ tal que:

(a)

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq K, \quad \forall (t, x) \in R_{a,b}.$$

(b)

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in R_{a,b}.$$

TEOREMA (T.E.U.)

Suponha $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista e seja contínua em U . Nestas condições, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do P.V.I. (1) definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

T.E.U. PARA EQUAÇÕES AUTÔNOMAS

TEOREMA

Suponha $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 no aberto W . Então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times W$ existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para um certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

CAUCHY-PEANO

TEOREMA (ASCOLI)

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de caminhos contínuos $x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e suponha que existam constantes $M, K > 0$ tais que, para todo n e todos $s, t \in [a, b]$,

$$\|x_n(s) - x_n(t)\| \leq K|s - t| \text{ e } \|x_n(t)\| \leq M.$$

Existe uma subsequência de $\{x_n\}$ que é de Cauchy em $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ e portanto converge uniformemente para $x \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$.

CAUCHY-PEANO

- Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$.
- Considere também α como em (4).
- Fixado $\delta > 0$, denote

$$I(\delta) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

LEMA

Dado qualquer $0 < \epsilon \leq \delta$ existe um caminho contínuo $x_\epsilon : I(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in I(\delta)$, valem

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(u)\| \leq M|t - u| \text{ e } \|x_\epsilon(t) - x_0\| \leq b \quad (5)$$

e, para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale

$$x_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds \quad (6)$$

CAUCHY-PEANO

TEOREMA (CAUCHY-PEANO)

Sejam $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} \subset U$. Então existe uma solução do problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, sendo α como em (4).