MATE 7010
Equações Diferenciais Ordinárias
S1 - 2022

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

11 DE ABRIL

Aula de hoje: Exponencial de matrizes

Relembrando

Definição

Dada uma matriz $A \in M(n)$, considere o sistema homogêneo

$$x' = A(t) \cdot x \tag{1}$$

e seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todas as suas soluções.

Proposição

O conjunto $\mathscr{A}$ é um espaço vetorial e valem as afirmações:

(a) Dado $s \in I$, a aplicação $\Lambda_s : \mathbb{R}^n \to \mathscr{A}$ que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $\varphi(t, s, x_0)$, que passa por (s, x_0), é um isomorfismo;

(b) $dim(\mathscr{A}) = n$;

(c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base de $\mathscr{A}$, sendo

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t, s, v_j),\ j = 1, \ldots, n.$$

- Considere a equação matricial

$$X' = A(t)X, \tag{2}$$

definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{2}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$.
- Uma solução de (2) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n\times n}$.

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{2}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$.
- Uma solução de (2) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n\times n}$.
- Note que o T.E.U. se aplica a tal equação com condição inicial $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$, pois (2) equivale a
$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i;k}(t)x_{k,j}, \ 1 \leq i,j \leq n.$$

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{2}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$.
- Uma solução de (2) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n\times n}$.
- Note que o T.E.U. se aplica a tal equação com condição inicial $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$, pois (2) equivale a
$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i;k}(t)x_{k,j},\ 1 \leq i,j \leq n.$$
- Temos também que $\phi(t)$ é solução de (2) se, e somente se, cada j-ésima coluna $\phi_j(t)$ de $\phi(t)$ é solução da equação (1).

- Considere a equação matricial
$$X' = A(t)X, \tag{2}$$
definida em $I \times M(n)$, com $I \subseteq \mathbb{R}$.
- Uma solução de (2) é então um caminho $X : I \to M(n)$ e utilizaremos a notação $X(t) = [x_{i,j}]_{n \times n}$.
- Note que o T.E.U. se aplica a tal equação com condição inicial $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$, pois (2) equivale a
$$x'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i;k}(t) x_{k,j}, \ 1 \leq i, j \leq n.$$
- Temos também que $\phi(t)$ é solução de (2) se, e somente se, cada j-ésima coluna $\phi_j(t)$ de $\phi(t)$ é solução da equação (1).

Definição

Uma matriz $\phi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base para $\mathscr{A}$ chama-se **matriz fundamental** de (1).

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax, \; A \in M(n). \tag{3}$$

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax, \; A \in M(n). \tag{3}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax, \ A \in M(n). \tag{3}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1, A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax, \; A \in M(n). \tag{3}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1, A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

(a) $\phi'(t) = A\varphi(t)$, com $\phi(0) = I$;

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax, \ A \in M(n). \tag{3}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1, A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

(a) $\phi'(t) = A\varphi(t)$, com $\phi(0) = I$;

(b) $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes

$$x' = Ax,\ A \in M(n). \tag{3}$$

- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1, A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

(a) $\phi'(t) = A\varphi(t)$, com $\phi(0) = I$;

(b) $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

Coeficientes constantes

- Considere a gora a equação linear homogênea de coeficientes constantes
$$x' = Ax,\ A \in M(n). \tag{3}$$
- Denotemos por $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$.
- Se $n = 1$, $A = a$, então $\phi(t) = e^{at}$. Mostremos que, em geral, a função $t \mapsto \phi(t)$ tem propriedades análogas a exponencial.

Proposição (1)

Seja $\phi(t)$ a matriz fundamental de (3) tal que $\phi(0) = I_{n\times n}$. Temos então:

(a) $\phi'(t) = A\varphi(t)$, com $\phi(0) = I$;

(b) $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) a série
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$
converge para $\phi(t)$ em $\mathbb{R}$, uniformemente em cada intervalo compacto.

Definição

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $\phi(1)$, ou seja, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Definição

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $\phi(1)$, ou seja, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Observação

Note que podemos reescrever a Proposição 1 da seguinte forma:

(a) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(b) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

Definição

A exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ é por definição $\phi(1)$, ou seja, $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Observação

Note que podemos reescrever a Proposição 1 da seguinte forma:

(a) $\dfrac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$, com $e^0 = I$;

(b) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$;

(c) $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

Proposição (2)

Sejam $A, B, C \in M(n)$.

(a) Se $BC = CA$, então $e^{tB}C = Ce^{tA}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Se $AB = BC$, então
$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

PROPOSIÇÃO (3)

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^B Q^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

PROPOSIÇÃO (3)

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então $e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2})$.

Proposição (3)

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então $e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2})$.

- Se E é uma matriz nilpotente, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$, então $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \dfrac{E^k}{k!}$.

Proposição (3)

- Sejam $A, B \in M(n)$ tais que $A \sim_Q B$. Então:

(a) $e^A = Qe^BQ^{-1}$;

(b) se $B = diag(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, então $e^A = Qdiag(e^{\kappa_1}, \ldots, e^{\kappa_n})Q^{-1}$;

(c) se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, então $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

- Se A é uma matriz diagonal por blocos quadrados, isto é, $A = diag(A_1, \ldots, A_m)$, então $e^A = diag(e^{A_1}, \ldots, e^{A_2})$.

- Se E é uma matriz nilpotente, ou seja, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $A^\ell = 0$, então $e^E = \sum_{k=0}^{\ell} \dfrac{E^k}{k!}$.

- Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $J(\lambda) = \lambda I + E$, sendo E a matriz nilpotente

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } e^{tJ(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

FORMA CANÔNICA DE JORDAN 2×2

- Note então que podemos calcular as exponenciais de matrizes 2×2 através forma canônica de Jordan, poise se λ_1, λ_2 são as duas raízes do polinômio característico de $A \in M(2)$:

1. se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
2. se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e
   (a) $dim(V_{\lambda_0}) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I$.
   (b) $dim(V_{\lambda_0}) = 1$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.
3. se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Relembrando (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s,\varphi(s,u,x))ds, \tag{4}$$

sendo $\Omega = \big\{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\big\} \subset \mathbb{R} \times U$.

Relembrando (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s, \varphi(s,u,x))ds, \tag{4}$$

sendo $\Omega = \{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\} \subset \mathbb{R} \times U$.

- Note então que o fluxo da equação linear $x' = Ax$ é dado por

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Relembrando (Fluxo)

O **fluxo** da equação $x' = f(t,x)$ é por definição a função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t,u,x) = x + \int_u^t f(s,\varphi(s,u,x))ds, \tag{4}$$

sendo $\Omega = \left\{(t,u,x) \in \mathbb{R}^{n+2};\ t \in I(u,x),\ (u,x) \in U\right\} \subset \mathbb{R} \times U$.

- Note então que o fluxo da equação linear $x' = Ax$ é dado por

$$\varphi(t,x) = e^{tA}x,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Lema (1)

O fluxo φ de $x' = Ax$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\varphi(0,x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$, para todo $s,t \in \mathbb{R}$, e todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi(t,\cdot)$ é linear em $\mathbb{R}^n$.