Análise III

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Entregar dia 27 de abril

Exercício 1 *Mostre que a esfera não contém segmentos de retas.*

Exercício 2 *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *tal que, para todo compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$*, a interseção* $X \cap K$ *é compacta. Prove que* X *é fechado.*

Exercício 3 *Se* A *é aberto e* $A \cap \overline{X} \neq \emptyset$*, então* $A \cap X \neq \emptyset$*.*

Exercício 4 *Se* $E \subset \mathbb{R}^n$ *é um subespaço vetorial, então* E *é fechado.*

Exercício 5 *Seja* $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. Mostre que se* $dim(\mathcal{N}) < \infty$*, então toda sequência de Cauchy converge.*

Exercício 6 *Mostre que se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é contínua e* $E \subset \mathbb{R}^n$ *é conexo por caminhos, então* $f(E)$ *é conexo por caminhos.*

Exercício 7 *Considere* $A \subset \mathbb{R}^n$ *não vazio. Para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *defina a distância entre* x *e* X *pondo*

$$dist(x, X) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in X\}$$

1. *Mostre que* $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, X) = 0\}$*;*
2. *Porve que a função* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto d(x, X)$ *é uniformemente contínua. Em particular, um conjunto* X *é fechado se, e somente se, coincide com o conjunto de zeros de uma função contínua;*
3. *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *fechados e disjuntos. Mostre que a função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)}$$

é contínua, com $f(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$*. Além disso,* $A = f^{-1}(0)$ *e* $C = f^{-1}(1)$*.*

Exercício 8 *O gráfico de uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é o conjunto*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m};\ x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

Suponha que f *é contínua.*

1. *Mostre que* G_f *é fechado;*
2. *Mostre que* A *e* G_f *são homeomorfos;*

3. *Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ *a esfera unitária e* $p = (0, \ldots, 1) \in \mathbb{S}^n$. *Mostre que* $\mathbb{S}^n - \{p\}$ *é homeormorfo a* $\mathbb{R}^n$;

Exercício 9 *Sejam* $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ *e* C_a *a união de todos os conexos em* X *que contêm o ponto* a. *Tal conjunto é dito componente conexa de* a *em* X. *Mostre que:*

1. *Se* $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, *então* $C_a = \{a\}$.
2. *Se* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é conexo, então* $C_a = X$.
3. C_a *é o maior conjunto conexo de* X *que contêm* a.
4. *Se* $x, y \in X$, *então ou* $C_x \cap C_y = \emptyset$, *ou* $C_x = C_y$.
5. *Verifique que relação* x, y ***estão na mesma componente em*** X *determina uma relação de equivalência. Em particular,* $[x] = C_x$.