

Análise III

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1: Topologia em \mathbb{R}^n

1 Topologia em \mathbb{R}^n

Exercício 1 Mostre que em \mathbb{R}^n vale:

1. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$;
2. $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ se, e só se, x e y são l.d.;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (quando vale a igualdade?);
4. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
5. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Exercício 2 Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\text{int}(\partial A) = \emptyset$. Dê um exemplo $D \subset \mathbb{R}^n$ com ∂D aberto e não vazio.

Exercício 3 Vale que $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$? E quanto a $\text{int}(A \cup B)$?

Exercício 4 Avalie as afirmações:

1. $A \subset B \Rightarrow \partial A \subset \partial B$;
2. $\partial A = \partial(\overline{A})$;
3. $\partial A = \partial(\text{int}(A))$;
4. $\text{int}(\partial A) = \emptyset$;
5. $\partial A \cap \partial B \subset \partial(A \cap B)$;

Exercício 5 Sejam $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

1. Se $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$, mostre que $\overline{B_n} = \bigcup_{j=1}^n \overline{A_j}$;
2. Se $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, mostre que $\overline{B} \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ (Qual inclusão não é verdadeira?).

Exercício 6 Mostre:

1. $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $S \subset K$ infinito $\Rightarrow S$ tem ponto de acumulação em K ;
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$, com K compacto, então existe subsequência convergente em K ;
3. $S \subset \mathbb{R}^n$ infinito não enumerável implica em existir ponto de acumulação.

Exercício 7 Mostre que: se F é fechado e $D \subset F$, então $\overline{D} \subset F$.

Exercício 8 Considere $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Mostre que se T é não identicamente nula, então $T(\mathbb{R}^m)$ não é limitado. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado, então $T(X)$ é limitado.

Exercício 9 Mostre que a esfera não contém segmentos de retas.

Exercício 10 Seja $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Mostre que se $\dim(\mathcal{N}) < \infty$, então toda sequência de Cauchy converge.

Exercício 11 Diz-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva norma se $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, então dizemos que T preserva produto interno.

1. Mostre que T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.
2. Mostre que uma transformação linear T com essa propriedade é necessariamente bijetiva.
3. Mostre que T^{-1} preserva norma.

Exercício 12 Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ não nulos. O ângulo entre x e y é denotado por $\angle(x, y)$ e definido como sendo

$$\angle(x, y) \doteq \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right).$$

Diz-se que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva ângulo se é bijetiva e $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. Mostre que se T preserva norma, então preserva ângulo.
2. Suponha que exista uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathbb{R}^n e números $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tais que $Tx_i = \lambda_i x_i$. Nestas condições, T preserva ângulo se, e só se, os valores λ_i coincidem.
3. Caracterize todas as transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservam ângulos.

Exercício 13 Obtenha o conjunto dos pontos interiores, pontos exteriores e pontos de fronteira dos seguintes conjuntos:

1. $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$;
2. $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$;
3. $\{x \in \mathbb{R}^n; \text{cada coordenada } x_i \text{ é racional}\}$.

Exercício 14

Exercício 15 Considere $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção sobre a i -ésima coordenada, isto é, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\pi_i(A) \subset \mathbb{R}$ também é aberto.

Exercício 16 Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos quaisquer. Mostre que:

1. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
2. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$;
3. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$. (Aqui $X \times Y \subset \mathbb{R}^{2n}$. O resultado é o mesmo se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$.)

Exercício 17 Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência de uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma subsequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergindo para a . Mostre que o conjunto X de todos os valores de aderência de uma sequência é um conjunto fechado. Se a sequência é limitada, então X é compacto e não vazio.

Exercício 18 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, a interseção $X \cap K$ é compacta. Prove que X é fechado.

Exercício 19 O diâmetro de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, quando existe, é definido por

$$\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então existem $a, b \in K$ tais que $\text{diam}(K) = \|a - b\|$.

Exercício 20 O distância entre dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (sempre existe?), é definida por

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Mostre que se A e B são limitados, disjuntos, não vazios e $\text{dist}(A, B) = 0$, então $\partial(A) \cap \partial(B) \neq \emptyset$.

Exercício 21 Mostre que \mathbb{R}^n é separável, isto é, existe $A \subset \mathbb{R}^n$ denso e enumerável.

Exercício 22 Se A é aberto e $A \cap \bar{X} \neq \emptyset$, então $A \cap X \neq \emptyset$.

Exercício 23 Se $E \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial, então E é fechado. (Esse resultado vale em dimensão infinita, isto é, se V é um espaço normado e E é um subespaço de dimensão finita, então E é fechado.)

Exercício 24 Se o conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $x \in A$, então $A - \{x\}$ é também aberto.

Exercício 25 Mostre que as componentes conexas de um subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ são também conjuntos abertos.

Exercício 26 Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola (aberta ou fechada). Mostre que, para todo $x \in B$, o conjunto $B - \{x\}$ é conexo.

Exercício 27 Um conjunto conexo enumerável $X \subset \mathbb{R}^n$ tem no máximo um ponto.