Análise em $\mathbb{R}^n$

Professor:

Fernando de Ávila Silva

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

Exercício 1 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$ *possui inversa* $g(x) = x^{1/3}$ *que não é derivável em* $x = 0$. *Existe alguma contradição com o teorema da função inversa?*

Exercício 2 *Estude a injetividade local de* $f(x, y) = (x^3, y^3)$ *no ponto* $(0, 0)$.

Exercício 3 *Estude a injetividade local de* $f(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2, x + y)$, *em cada ponto* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 4 *Sejam* $M_n(\mathbb{R})$ *o espaço da matrizes reais* $n \times n$ *e* $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *dada por* $f(X) = X^2$. *Mostre que se* $Y \in M_n(\mathbb{R})$ *está suficientemente próximo de* I, *então existe único* X *próximo de* I *tal que* $X^2 = Y$ *e* $X = X(Y)$ *é de classe* C^∞.

Exercício 5 *Repita o exemplo feito em sala (3 raízes distintas) para o polinômio*

$$p(x) = x^4 - a_0x^3 + b_0x^2 - c_0x + d_0$$

(agora você supõe 4 raízes distintas.)

Exercício 6 *Suponha* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *uma contração. Se* $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *denota o operador identidade, mostre que* $g = I + f$ *é um homeomorfismo do aberto* A *sobre o aberto* $g(A)$. *(Este resultado é conhecido como Perturbação da identidade) .*

Exercício 7 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1. *Admita que*

$$f(x_0, y_0) = c \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

(a) *Verifique que o vetor gradiente de* f, *no ponto* (x_0, y_0), *é perpendicular ao gráfico de* $y = y(x)$.

(b) *Determine a reta tangente a curva* $f(x, y) = c$ *no ponto* (x_0, y_0).

Exercício 8 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ *satisfazendo as condições do teorema da função implícita no ponto* (x_0, y_0), *com* $f(x_0, y_0) = c$. *Determine a equeção do plano tangente ao conjunto*

$$S = \{(x, y);\ f(x, y) = c\},$$

no ponto (x_0, y_0).

Exercício 9 *Considere* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções, sendo* g *de classe* C^∞ *determinada por*

$$g(x) = \int_0^{f(x)} (1 + t^2)dt.$$

Mostre que f *é de classe* C^∞.

Exercício 10 *Considere* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função bijetiva de classe* C^1*, tal que* $\det(f'(x)) \neq 0$*, para todo* $x \in A$*. Mostre que* $f(A)$ *é aberto e que a inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ *é de classe* C^1*.*

Exercício 11 *Prove que se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivável e* $f'(x) \neq 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, então* f *é bijetiva.*

Exercício 12 *Considere* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Mostre que $\det(f'(x, y)) \neq 0$*, mas* f *não é injetiva em* $\mathbb{R}^2$ *(Note que é localmente!).*

Exercício 13 *Considere a equação*

$$x^3 + xy^2 + y^3 = 1.$$

É possível obter $x = x(y)$*, nas proximidades do ponto* $(1, 0)$*. E* $y = y(x)$*?*