CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

19 de Outubro

Aula de hoje: Topologia em $\mathbb{R}^n$.

- Normas; Conjuntos abertos e conjuntos fechados.

ESPAÇO EUCLIDIANO

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.
- Os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são, por definição, da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.
- Os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são, por definição, da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Consideramos em $\mathbb{R}^n$ a estrutura natural de espaço vetorial:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.
- Os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são, por definição, da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Consideramos em $\mathbb{R}^n$ a estrutura natural de espaço vetorial:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

- O elementos de $\mathbb{R}^n$ serão chamados de pontos, ou de vetores.

Espaço euclidiano

- Ao longo do curso utilizaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para indicar o espaço euclidiano n-dimensional definido pelo produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.
- Os elementos $x \in \mathbb{R}^n$ são, por definição, da forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Consideramos em $\mathbb{R}^n$ a estrutura natural de espaço vetorial:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

- O elementos de $\mathbb{R}^n$ serão chamados de pontos, ou de vetores.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ defini-se o número

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

Norma

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(N3) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Observação (Exercício)

A função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y)$ satisfaz

(D1) $d(x,y) \geq 0,\ \forall x, y \in M$.

(D2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in M$. (Simetria)

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in M$. (Desigualdade Triangular)

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$
\begin{aligned}
\text{(euclidiana)} \ \ \|x\| &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}, \\
\text{(soma)} \ \ \|x\|_s &= \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \\
textrm(mximo) \ \ \|x\|_m &= \max_{1 \le j \le n} |x_j|.
\end{aligned}
$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$\text{(euclidiana)} \ \ \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\text{(soma)} \ \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$textrm(mximo) \ \ \|x\|_m = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

Teorema (C-S)

Vale a desigualdade

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas (usuais):

$$\text{(euclidiana)}\ \ \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2},$$
$$\text{(soma)}\ \ \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$
$$textrm(mximo)\ \ \|x\|_m = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

Teorema (C-S)

Vale a desigualdade
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema (Equivalência)

Vale a desigualdade
$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n\|x\|_m,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\mathcal{N}$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y)$. Temos então os conjuntos

$$\begin{aligned} B(a;r) &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) < r\} \\ B[a;r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) \leq r\} \\ S[a;r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) = r\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= S[0;1] \end{aligned}$$

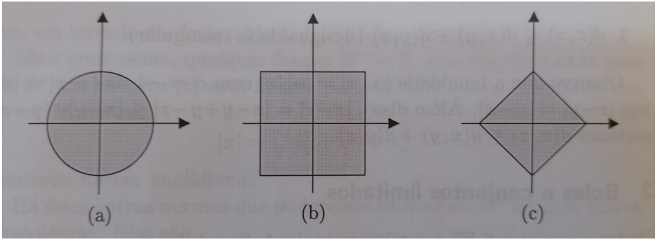
Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $\mathcal{N}$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e $d(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$. Temos então os conjuntos

$$
\begin{aligned}
B(a; r) &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) < r\} \\
B[a; r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) \leq r\} \\
S[a; r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) = r\} \\
\mathbb{S}^{n-1} &= S[0; 1]
\end{aligned}
$$

Observação

Em $\mathbb{R}^2$, com respeito a norma euclidiana, do máximo e da soma.



CONJUNTOS LIMITADOS

- A menos de menção contrária utilizaremos a norma euclidiana.

Conjuntos limitados

- A menos de menção contrária utilizaremos a norma euclidiana.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se está contido em alguma bola $B[a; r]$.

Conjuntos limitados

- A menos de menção contrária utilizaremos a norma euclidiana.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se está contido em alguma bola $B[a; r]$.

Definição

Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita limitada se $f(X)$ é um conjunto limitado.

Conjuntos limitados

- A menos de menção contrária utilizaremos a norma euclidiana.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se está contido em alguma bola $B[a;r]$.

Definição

Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita limitada se $f(X)$ é um conjunto limitado.

Lema

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, existe $M > 0$ tal que

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in X.$$

Conjuntos convexos

Conjuntos convexos

Definição

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ dois pontos distintos, o segmento de reta de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb,\ \forall 0 \leq t \leq 1\}.$$

Conjuntos convexos

Definição

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ dois pontos distintos, o segmento de reta de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb,\ \forall 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando

$$[x, y] \subset X,\ \forall x, y \in X.$$

Conjuntos convexos

Definição

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ dois pontos distintos, o segmento de reta de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb,\ \forall 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando

$$[x, y] \subset X,\ \forall x, y \in X.$$

Exemplo

Toda bola (aberta ou fechada) é um conjunto convexo.

CONJUNTOS ABERTOS

Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.

Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.

Observações

- Note que a definição de ponto interior utiliza o conceito de bola, o qual depende da norma. Porém, utilizando a equivalência das normas euclidiana, do máximo e da soma podemos afirmar que se um ponto é interior com respeito a uma destas normas, então será com respeito as outras duas. O mesmo vale sobre ser aberto.

Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.

Observações

- Note que a definição de ponto interior utiliza o conceito de bola, o qual depende da norma. Porém, utilizando a equivalência das normas euclidiana, do máximo e da soma podemos afirmar que se um ponto é interior com respeito a uma destas normas, então será com respeito as outras duas. O mesmo vale sobre ser aberto.
- Mais ainda, iremos verificar mais adiante que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. De modo que ser aberto com respeito a uma norma implicará em ser aberto com respeito a qualquer outra.

Conjuntos abertos

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.

Observações

- Note que a definição de ponto interior utiliza o conceito de bola, o qual depende da norma. Porém, utilizando a equivalência das normas euclidiana, do máximo e da soma podemos afirmar que se um ponto é interior com respeito a uma destas normas, então será com respeito as outras duas. O mesmo vale sobre ser aberto.
- Mais ainda, iremos verificar mais adiante que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. De modo que ser aberto com respeito a uma norma implicará em ser aberto com respeito a qualquer outra.
- Se um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ não é aberto, então existe $p \in X$ tal que $p \notin int(X)$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ temos $B(p, \epsilon) \cap X^C \neq \emptyset$.

Exemplos

- $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto;
- $\emptyset$ é aberto.
- A bola aberta é um conjunto aberto.

Teorema

(a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos, então $A_1 \cap A_2$ também o é.

(b) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos abertos, então

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

é um conjunto aberto.