CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

30 DE MARÇO

Aula de hoje: Sequências de Cauchy.

- Sequências de Cauchy.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
- Normas equivalentes.

Definição (Norma)

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(N1) $\mathcal{N}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = 0$.

(N2) $\mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(N3) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Exemplos:

$$\text{(euclidiana)} \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2},$$

$$\text{(soma)} \quad \|x\|_s = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$textrm(mximo) \quad \|x\|_m = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

- Valem a desigualdades

$$\|x\|_m \leq \|x\| \leq \|x\|_s \leq n \|x\|_m, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^n$

DEFINIÇÃO

- Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset X$.
- O conjunto dos pontos interiores de X será denotado por $int(X)$.
- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto se $int(X) = X$.
- Um conjunto F é dito fechado se F^C é aberto.
- Dizemos que p é um ponto **aderente** a um conjunto X se

  $$B(p, \epsilon) \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

  O conjunto dos pontos de aderência será denotado por $\overline{X}$.
- Dizemos que p é um ponto de **acumulação** de X se

  $$[B(p, \epsilon) \setminus \{p\}] \cap X \neq \emptyset, \ \forall \epsilon > 0.$$

  O conjunto dos pontos de aderência será denotado por X'.

TEOREMA

(a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos, então $A_1 \cap A_2$ também o é.

(b) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos abertos, então

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

é um conjunto aberto.

TEOREMA

(a) Se F_1 e F_2 são conjuntos fechado, então $F_1 \cup F_2$ também o é.

(b) Se $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $F = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ fechado.

Sequências

Definição

Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$.

(a) Dizemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $\|x_k\| \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N}$.

(b) Dizemos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $p \in \mathbb{R}^n$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - p\| < \epsilon, \ \forall k \geq N.$$

Proposição

(a) O limite de uma sequência, quando existe, é único.

(b) Temos que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $p = (p_1, \ldots, p_n)$ se, e somente se, $\{x_{k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para p_j, $j = 1, \ldots, n$.

(c) Se $x_k \to p$ e $y_k \to q$, então $x_k + y_k \to p + q$.

(d) Se $x_k \to p$, então $\|x_k\| \to \|p\|$.

(e) $p \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência de pontos de X que converge para p.

(f) Toda sequência convergente é limitada.

O teorema de Bolzano-Weierstrass

Proposição

Toda sequência convergente é limitada.

Observação

Não vale a volta do resultado acima.

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada possui subsequência convergente.

Sequências de Cauchy

Definição

Uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é dita de Cauchy se vale a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x_\ell\| < \epsilon, \ \forall k, \ell \geq N.$$

Proposição

- Toda sequência de Cauchy é limitada.
- Toda sequência convergente é de Cauchy.

Proposição

Toda sequência de Cauchy é convergente.

Normas equivalentes

Definição

Duas normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são ditas equivalentes se existem constantes positivas a, b tais que

$$|x| \leq a\|x\| \text{ e } \|x\| \leq b|x|, \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação

A equivalência de normas é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Teorema

Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.