CMM222 - Análise III
S1 - 2023

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

18 de Abril

Aula de hoje: Conjuntos conexos por caminhos

Conjuntos conexos

Definição

- Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que A, B são abertos de X e $A \cap B = \emptyset$.
- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo quando não admite outra cisão além da trivial.

Teorema

A reunião de uma família de conexos com um ponto em comum é um conjunto conexo.

Caminho

Definição

- Um caminho em $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua $f : I \to X$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Caminho

Definição

- Um caminho em $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua $f : I \to X$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.
- Dizemos que dois pontos $a, b \in X$ pode ser ligados po um caminho quando existe um caminho $f : I \subset X$ tal que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$, para $a, b \in I$ satisfazendo $\alpha < \beta$.

Caminho

Definição

- Um caminho em $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua $f : I \to X$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.
- Dizemos que dois pontos $a, b \in X$ pode ser ligados po um caminho quando existe um caminho $f : I \subset X$ tal que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$, para $a, b \in I$ satisfazendo $\alpha < \beta$.

Exemplos

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos o caminho que *liga x a y* dado por $f(t) = (1-t)x + ty,\ t \in [0,1]$.

Caminho

Definição

- Um caminho em $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua $f : I \to X$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.
- Dizemos que dois pontos $a, b \in X$ pode ser ligados po um caminho quando existe um caminho $f : I \subset X$ tal que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$, para $a, b \in I$ satisfazendo $\alpha < \beta$.

Exemplos

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos o caminho que *liga x a y* dado por $f(t) = (1-t)x + ty,\ t \in [0, 1]$.
2. Se X é convexo, então quaisquer dois pontos de X podem ser ligados por um caminho.

CONTINUIDADE E CONEXIDADE

Continuidade e conexidade

- Se $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho $f : I \to X$, então podemos definir $\varphi : [0,1] \to X$ pondo
$$\varphi(t) = f((1-t)\alpha + t\beta),$$
em que $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$.

Continuidade e conexidade

- Se $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho $f : I \to X$, então podemos definir $\varphi : [0,1] \to X$ pondo
$$\varphi(t) = f((1-t)\alpha + t\beta),$$
em que $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$.
- Se $f, g : [0,1] \to X$ são dois caminhos com $f(1) = g(0)$, então definimos o **caminho justaposto** $h : [0,1] \to X$ pondo
$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ g(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Continuidade e conexidade

- Se $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho $f : I \to X$, então podemos definir $\varphi : [0, 1] \to X$ pondo
$$\varphi(t) = f((1-t)\alpha + t\beta),$$
em que $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$.
- Se $f, g : [0, 1] \to X$ são dois caminhos com $f(1) = g(0)$, então definimos o **caminho justaposto** $h : [0, 1] \to X$ pondo
$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$
- Sejam $a, b, c \in X$ pontos de modo que a, b podem ser ligados por um caminho em X e b, c também satisfazendo tal propriedade. Nestas condições, existe um caminho ligando a e c.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer em X podem ser ligados por um caminho em X.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer em X podem ser ligados por um caminho em X.

Exemplos

- Todo conjunto convexo. (Logo, bolas são conexos por caminhos.)
- A esfera $\mathbb{S}^n$.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer em X podem ser ligados por um caminho em X.

Exemplos

- Todo conjunto convexo. (Logo, bolas são conexos por caminhos.)
- A esfera $\mathbb{S}^n$.

Proposição

Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer em X podem ser ligados por um caminho em X.

Exemplos

- Todo conjunto convexo. (Logo, bolas são conexos por caminhos.)
- A esfera $\mathbb{S}^n$.

Proposição

Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

Observação

A recíproca é falsa.

Definição

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer em X podem ser ligados por um caminho em X.

Exemplos

- Todo conjunto convexo. (Logo, bolas são conexos por caminhos.)
- A esfera $\mathbb{S}^n$.

Proposição

Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

Observação

A recíproca é falsa.

Teorema

Um aberto é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.

Exercício: Componentes conexas

Exercício: Componentes conexas

Definição

Sejam $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto C_x definido a partir da união de todos os conexos em X que contêm o ponto x é chamada de componente conexa de x em X.

Exercício: Componentes conexas

Definição

Sejam $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto C_x definido a partir da união de todos os conexos em X que contêm o ponto x é chamada de componente conexa de x em X.

1. Se $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então $C_x = \{x\}$.
2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$, então $C_x = X$.
3. C_x é o maior conjunto conexo de X que contêm x.
4. Se $x, y \in X$, então ou $C_x \cap C_y = \emptyset$, ou $C_x = C_y$.
5. Verifique que relação $x \sim y$ estão na mesma componente em X determina uma relação de equivalência. Em particular, $[x] = C_x$.